

INTERAZIONE UOMO-MACCHINA E ANALISI DEL SEGNALE

Agostino Accardo

Dip. Ingegneria e Architettura
accardo@units.it

LM Psicologia A.A. 2021-22

Obiettivi del corso: Individuazione delle caratteristiche principali del segnale EEG quantificate mediante tecniche di analisi lineari e non

Programma preliminare del corso

- Origine e caratteristiche del segnale EEG
- Segnali continui e segnali discreti, filtraggio, campionamento e aliasing
- Processi stocastici e parametri quantitativi, correlazione, covarianza, stazionarietà, media, varianza, autocorrelazione, cross-correlazione, serie di Fourier, analisi in frequenza, bande e spettro di potenza
- Analisi non lineare spazio di embedding e stima della sua dimensione, dimensione frattale, dimensione di correlazione, esponenti di Liapunov
- Applicazione metodi di analisi lineare (e non) al segnale EEG
- Potenziali evocati, averaging
- Cenni di MATLAB.....

Modalità di verifica

- Orale a fine corso
- Date esami (da stabilire – su www.units.it/accardo)
- Iscrizione esame via mail

Testi di riferimento

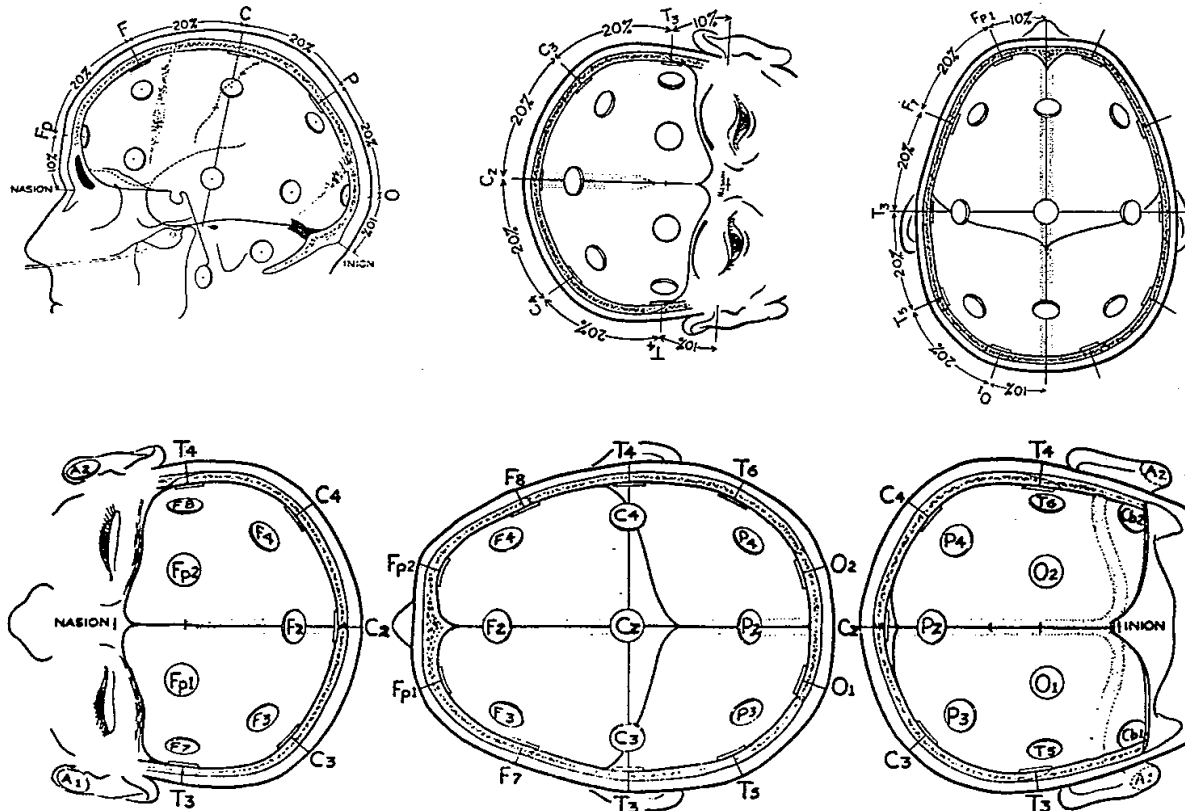
1. R. M. Rangayyan, "Biomedical Signal Analysis. A case-study approach", Wiley-Interscience, 2002
2. W.J. Tompkins, "Biomedical Digital Signal Processing", Prentice Hall, 1993
3. H. Kantz, T. Schreiber, "Nonlinear time series analysis", Cambridge University Press, 2nd Ed 2004
4. Slide lezioni (www.units.it/accardo)

Esempi di segnali biologici

- Potenziale d'azione: intracellulare, extracellulare.
- Neurogramma
- Elettroencefalogramma (EEG)
- Elettrocardiogramma (ECG)
- Elettromiogramma (EMG)
- Pressione arteriosa
- Flusso/volume respiratorio

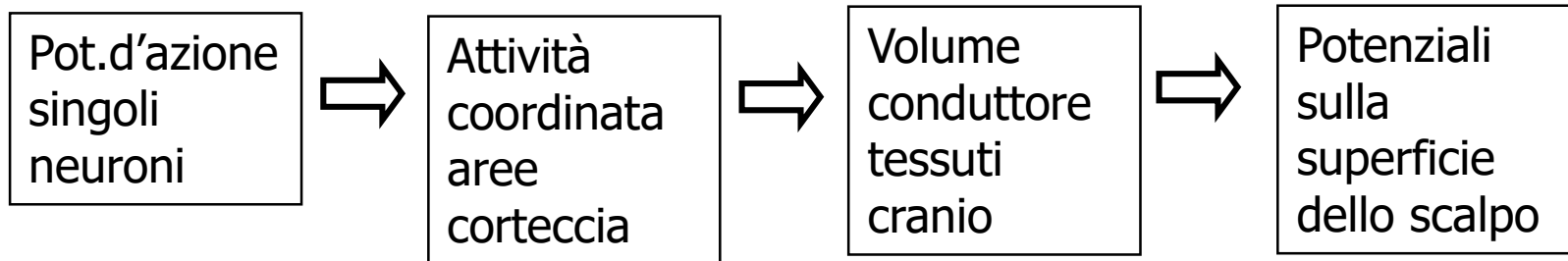
Elettroencefalogramma (EEG)

- Potenziale elettrico relativo all'attività cerebrale registrato sullo scalpo in posizioni standard: sistema 10/20



EEG – Caratteristiche principali

- **banda** 0.1 Hz - 70 Hz, ampiezza decine/centinaia di μV
- **stazionario** (con le stesse caratteristiche statistiche) per brevi tratti
- **non periodico** ma spesso con un ritmo prevalente concentrato su specifiche **bande di frequenza**
- le caratteristiche variano con la **derivazione**
- vi sono similitudini e sincronismi fra derivazioni vicine



- informazione indiretta e globale sull'attività cerebrale
- ridondanza del tracciato rispetto alle caratteristiche rilevanti
- possibilità di integrare informazioni da diverse derivazioni

EEG spontaneo – bande - Esempi di tracciato

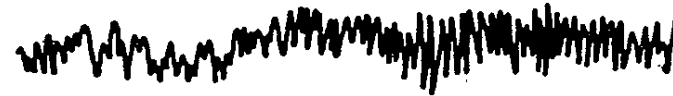
- ritmo α , 8-13 Hz

Alpha



- ritmo β > 13 Hz

Beta



- ritmo θ , 4-8 Hz

Theta



- ritmo δ < 4 Hz

Delta

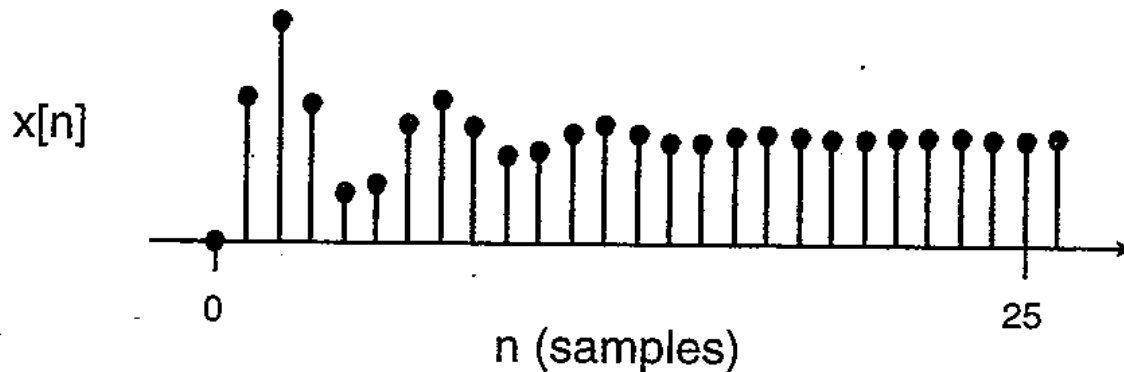
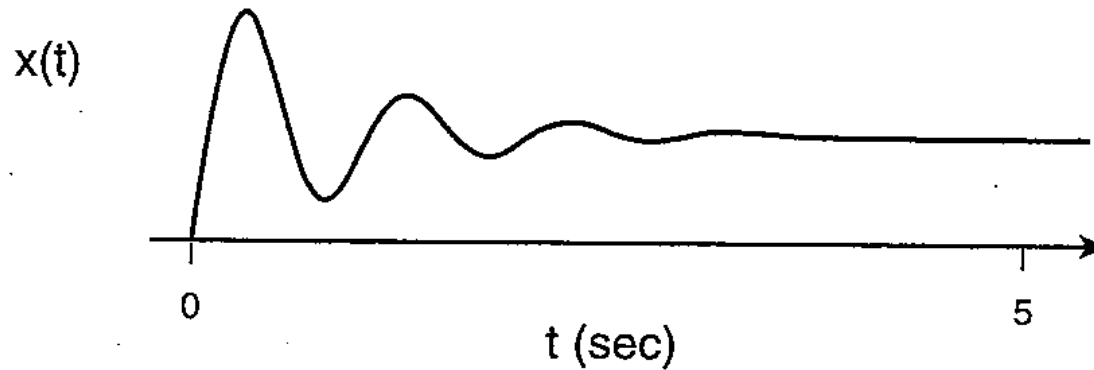


] 50 μ V

1 s

Per poter analizzare il segnale EEG è necessario avere prima acquisito dei concetti di base sui segnali in generale ('banda' ...) e sui possibili algoritmi di elaborazione

Tipi di segnali - Esempi



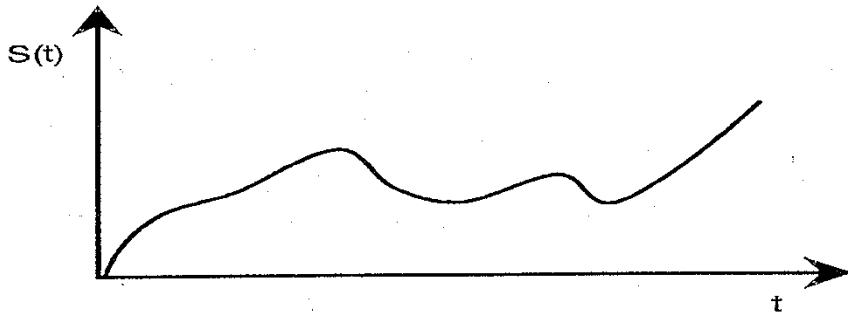
Un segnale a tempo continuo $x(t)$ è definito in ogni istante di tempo.

Il segnale a tempo discreto $x(n)$ si ottiene campionando $x(t)$ cioè prendendo solo alcuni valori di $x(t)$, uniformemente spaziatati nel tempo.

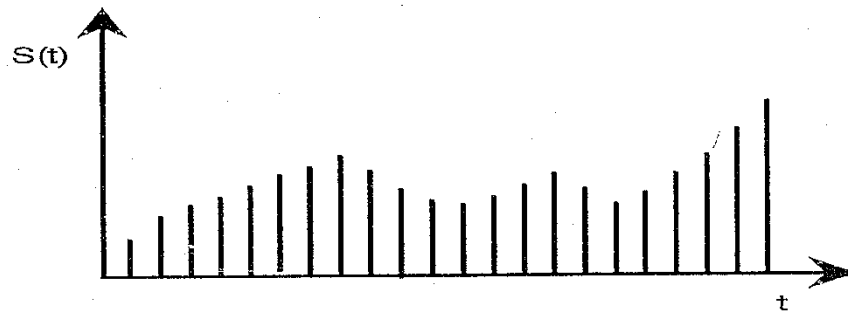
In questo caso abbiamo utilizzato 5 campioni per sec

Tipi di segnali - Esempi

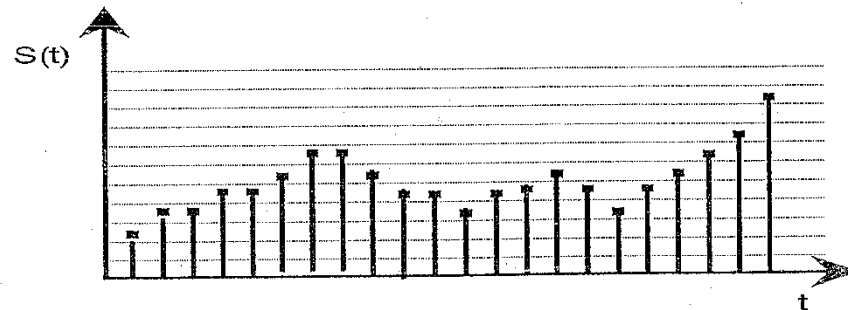
Esempi di segnale analogico, discreto, numerico.



Segnale **analogico** a tempo continuo

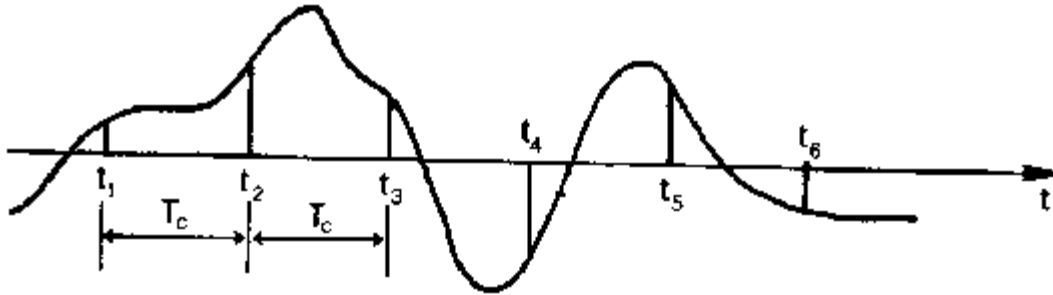


Segnale **discreto** nel tempo

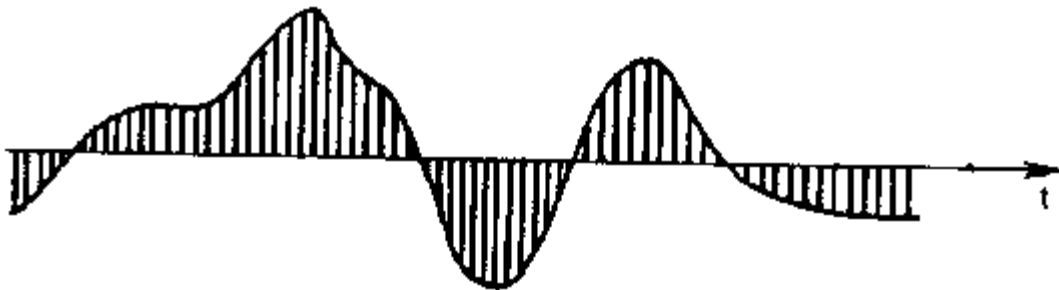


Segnale discreto nel tempo e nelle ampiezze:
digitale

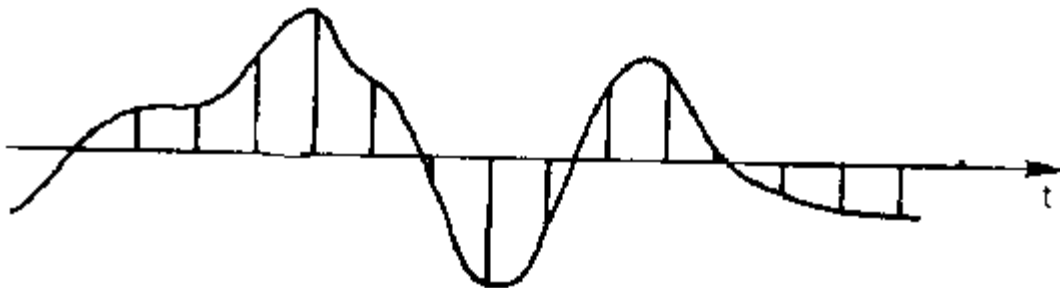
Campionamento di un segnale



Il segnale a tempo discreto $y(n)$ si ottiene campionando $y(t)$ cioè prendendo solo alcuni valori di $y(t)$, uniformemente spaziatati nel tempo.



E' possibile decidere quanti campioni considerare (di solito in 1 sec) come mostrano i 3 esempi.



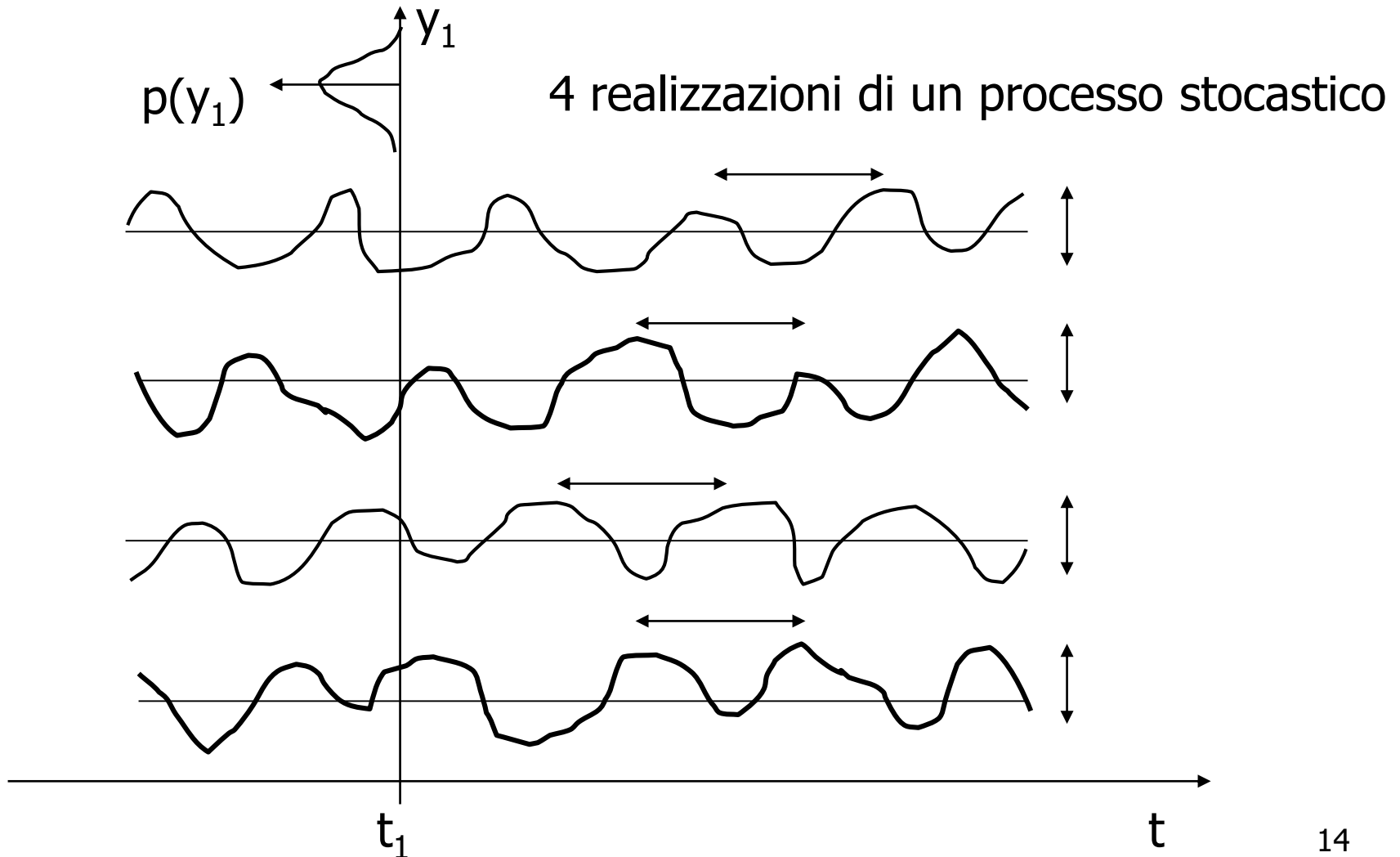
L'intervallo temporale tra due campioni successivi si chiama intervallo o **periodo** di campionamento T_c

Processi **stocastici**

- Molte volte si considera $y(t)$ come segnale **deterministico**
- In altri casi conviene considerare il valore di y in un generico istante t_1 , $y_1=y(t_1)$, come una variabile casuale con una distribuzione di probabilità $p(y_1)$
- Il segnale $y(t)$ è così visto come una delle tante possibili realizzazioni di un **processo stocastico**
- Questa impostazione è volta allo studio delle **caratteristiche statistiche** importanti del segnale trascurando gli aspetti casuali

Processi stocastici

... è casuale che $y(t)$ cada su un picco positivo di un segnale EEG; non è casuale che $y(t)$ oscilli intorno allo 0, o che le oscillazioni abbiano una certa ampiezza, o che un picco positivo segue uno negativo mediamente dopo un determinato tempo

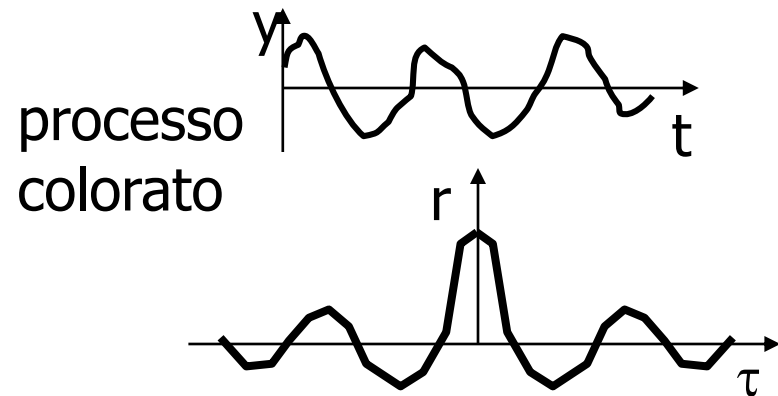
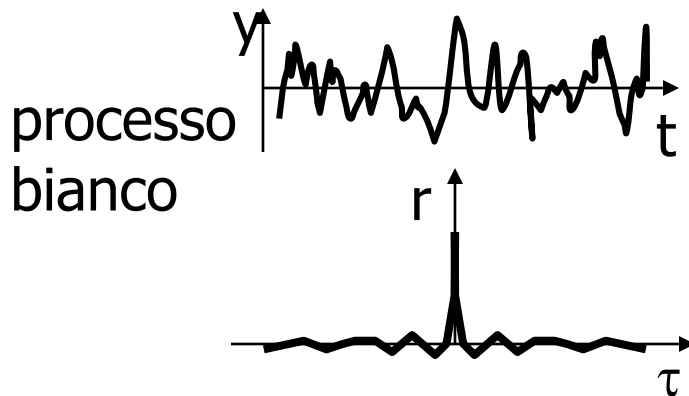


Parametri di processi stocastici

- il **valor medio** è il valore atteso (baricentro), $E(y_1)$, della distribuzione di probabilità $p(y_1)$ (con $y_1=y(t_1)$)
- come per ogni variabile casuale, la **varianza**, σ^2 , esprime la dispersione intorno al valore atteso
- la **deviazione standard**, σ , esprime la dispersione intorno al valore atteso nella stessa unità dell'ampiezza di y e viene anche indicata come **ampiezza efficace** del segnale
- l'**indice di variazione %**, $\sigma/E(y_1) \%$, esprime in % il rapporto fra ampiezza efficace e polarizzazione (=media) del segnale

Processi stazionari - funzione di autocorrelazione

- la **funzione di autocorrelazione**, $r(\tau) + m^2$, di un processo stazionario (almeno in senso debole) esprime la correlazione fra due istanti del processo in dipendenza del ritardo τ che li separa
- "auto" in quanto correlazione del processo con se stesso
- spesso è utilizzata la sigla **ACF** (autocorrelation function)
- spesso il calcolo è preceduto dalla sottrazione del valor medio m e quindi si indica con ACF la funzione $r(\tau)$ prendendo "autocorrelazione" come sinonimo di "autocovarianza"
- $r(0) = \sigma^2$ (varianza); $r(-\tau) = r(\tau)$ (funzione pari)

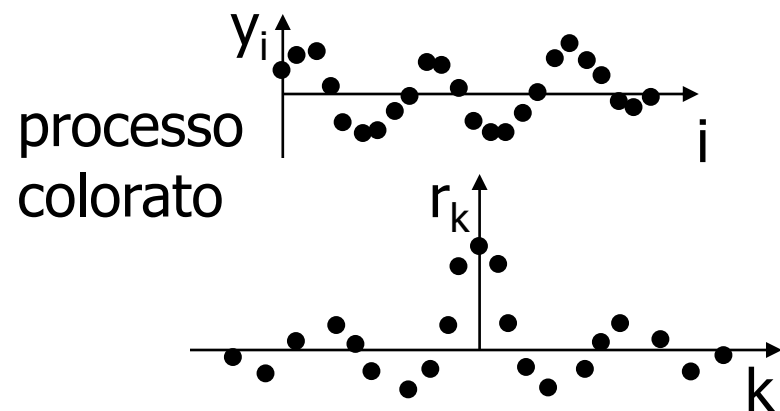
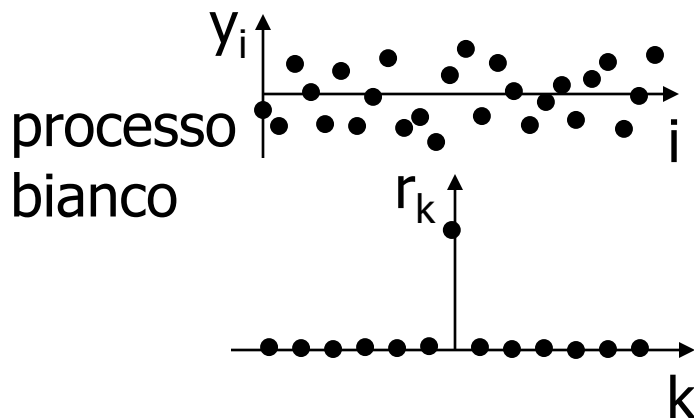


Processi stazionari ergodici - tempo discreto

- un processo stocastico si dice ergodico quando le medie statistiche convergono quasi ovunque alle medie temporali
- il calcolo delle medie temporali viene scritto:

$$m = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} y_i \quad ; \quad y_i = y(i \cdot T_C) \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$r_k + m^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} y_i \cdot y_{i+k} \quad ; \quad k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$



Analisi in frequenza di un segnale

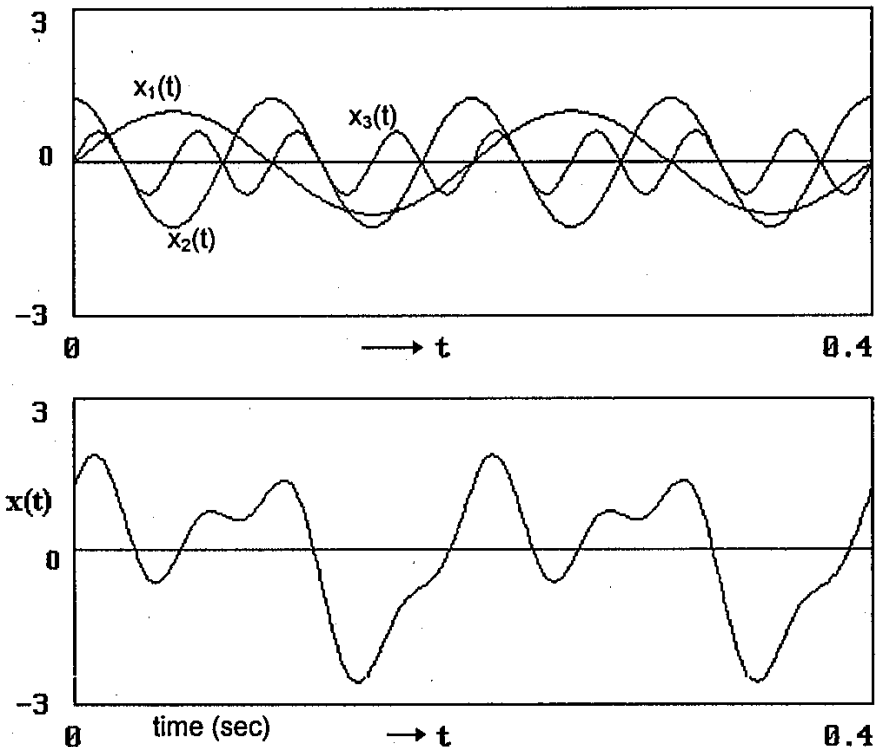
- l'analisi in frequenza di un segnale o analisi di **Fourier** descrive il segnale $y(t)$ come **somma di sinusoidi** in numero eventualmente illimitato
- verrà inizialmente considerato il caso di un segnale periodico di periodo T ; questo mediante la **serie di Fourier** viene descritto come somma di coseni e seni con frequenza pari alla frequenza fondamentale $f_1=1/T$ e con frequenza multipla (componenti armoniche) $f_k=k/T$.
- la **trasformata di Fourier** generalizza questo concetto a funzioni aperiodiche.

Scomposizione di funzioni periodiche

- consideriamo un segnale con periodo 0.2 sec (freq. fondamentale 5 Hz) costituito da 3 armoniche:

$$y(t) = \sin(2\pi \cdot 5 \cdot t) + 1.25 \cos(2\pi \cdot 10 \cdot t) + 0.6\sin(2\pi \cdot 20 \cdot t)$$

- si nota che l'andamento del segnale su un periodo descritto dal valore di y per tutti i valori reali $0 \leq t < 0.2$ viene riassunto da solo 3 valori, le ampiezza delle armoniche



Scomposizione di funzioni periodiche

- in generale qualsiasi segnale periodico, che presenti un numero limitato di discontinuità, è descrivibile mediante la somma di coseni e seni di frequenza multipla di una fondamentale ($1/T$)
- la serie (illimitata) dei coefficienti costituisce lo sviluppo in **serie di Fourier** del segnale periodico
- se le discontinuità sono tali che il segnale e le sue derivate siano limitati (salti, punti angolosi) i coefficienti della serie di Fourier convergono a 0 per frequenze $\rightarrow \infty$
- questo permette di troncare lo sviluppo con un errore di approssimazione limitato
- vediamo un esempio: segnale ECG

Analisi spettrale

- Il contenuto in frequenza di un segnale deterministico oppure stocastico stazionario è messo in evidenza da tracciati ottenuti mediante la trasf. di Fourier che prendono il nome di **spettri** (in analogia col contenuto della luce alle varie lunghezze d'onda)
- a seconda della caratteristica descritta si parla di:
- **spettro di ampiezza**, descrive l'ampiezza delle componenti armoniche (l'uso degli sp. di energia o di potenza è più comune)
- **spettro di fase**, nei segnali deterministici descrive la fase delle componenti armoniche rispetto ad un riferimento temporale fisso; nei segnali stocastici questo non ha senso (almeno in ambito lineare) ma spesso occorre dare lo sfasamento fra la stessa componente armonica di due segnali diversi
- **spettro di energia** descrive l'ampiezza quadratica delle componenti armoniche nei segnali deterministici
- **spettro di potenza**, descrive l'ampiezza quadratica media delle componenti armoniche nei segnali stocastici

Spettro di potenza - processi stocastici stazionari

- sia $y(i)$ un processo a t. discreto, stocastico, stazionario (almeno in senso debole), ergodico (medie statistiche convergono alle medie temporali) ed a media nulla, la varianza è:

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(i)^2$$

- è immediato riconoscere a questa un significato di **potenza** (media di valori quadratici); meno immediato è definire uno spettro di potenza; infatti, non esiste una Serie di Fourier perché non esistono periodicità deterministiche; non esiste una DTFT poiché il segnale è illimitato e ad energia infinita
- è però intuitivo che oscillazioni che si ripetono in modo statisticamente significativo possano essere stimate, grazie alla ergodicità, anche su un finestra limitata di N campioni
- lo spettro di potenza teorico del processo viene quindi definito come limite per $N \rightarrow \infty$ della stima su N campioni

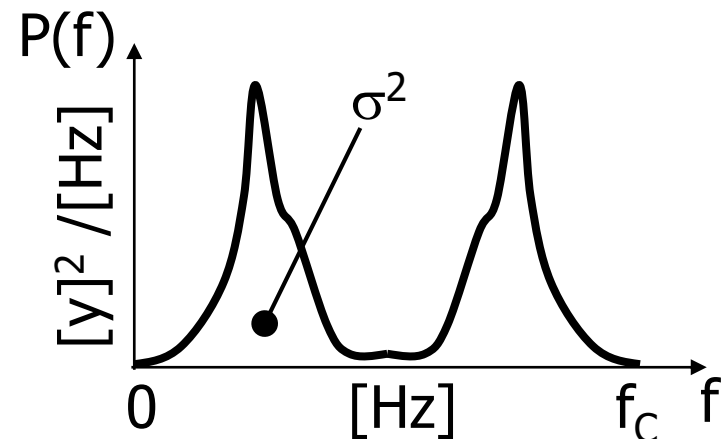
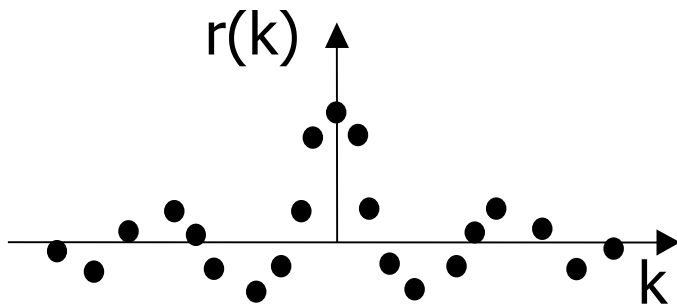
Spettro di potenza - **trasf. di Fourier della ACF**

- il **Th. di Wiener-Khinchin** definisce lo spettro di potenza di un processo stocastico stazionario come la transf. di Fourier della ACF; in tempo discreto:

$$S(\Omega) = \mathcal{F}(r(k))$$

- l'antitrasformata di $S(\Omega)$, per $k=0$, coincide con l'integrale dello spettro $S(\Omega)$ e restituisce $r(0)=\sigma^2=\text{Pot.}$ in accordo con Parseval

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\Omega) d\Omega$$



Spettro di potenza

- lo spettro di potenza viene anche detto densità spettrale di potenza (PSD, Power Spectral Density)
- le stime del PSD ottenute mediante trasf. di Fourier (mediante la FFT) sono dette **non-parametriche** e, come vedremo qui di seguito, si basano sul calcolo diretto del periodogramma
- metodi **parametrici** non analizzano direttamente il contenuto in freq. ma stimano i parametri di opportuni modelli da cui si ricava la PSD
- alcune applicazioni:
 - ritmi nell'EEG: α , β , θ , δ
 - ritmi nella variabilità della freq. cardiaca: LF (0.1 Hz - controllo cardiovascolare), HF (0.3 Hz - attività respiratoria)
 - freq. media dell'EMG (tipo di unità motorie e freq. di scarica)
 - freq. formanti nel parlato (suoni vocalici e consonantici)
 - suoni valvole cardiache (stenosi od insufficienza valvolare)

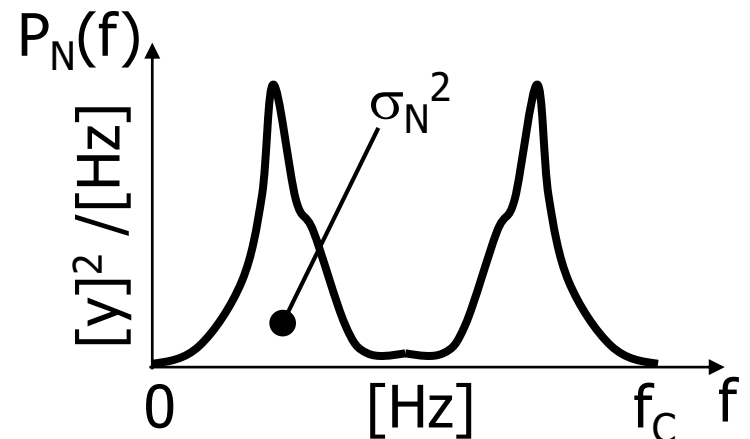
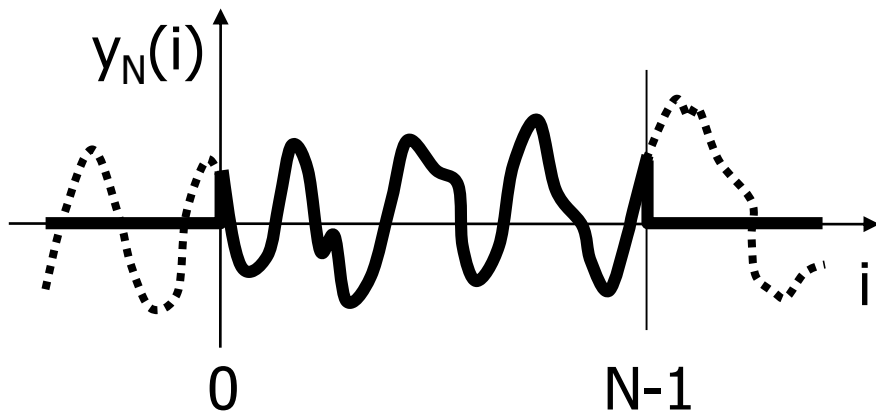
Periodogramma

- sia $y_N(i)$ il segnale **finestrato** su N campioni ($y_N(i)=y(i)$, per $i=0, \dots, N-1$, $y_N(i)=0$ altrove) sia $Y_N(\Omega)$ la sua DTFT, definiamo il **periodogramma** stimato su N campioni, $S_N(\Omega)$

$$S_N(\Omega) = \frac{|Y_N(\Omega)|^2}{N} = \frac{Y_N(\Omega) Y_N^*(\Omega)}{N} ; \quad S(\Omega) = E \left[\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\Omega) \right]$$

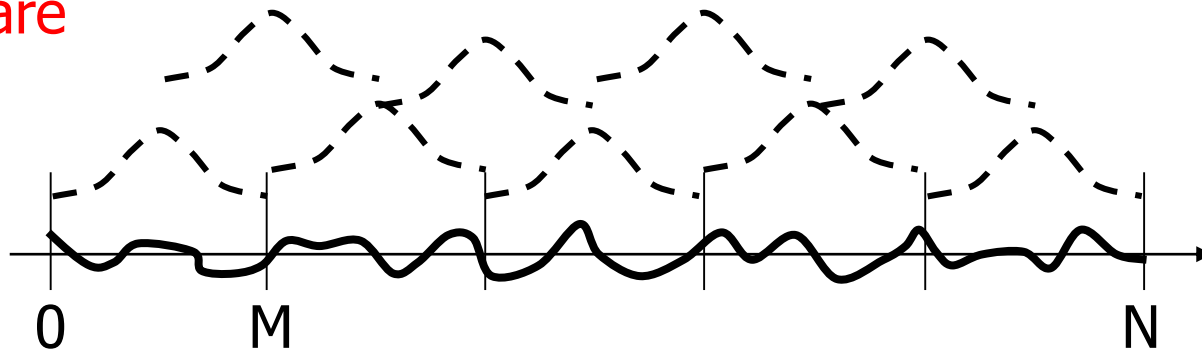
- si noti che la relazione di Parseval vale per qualsiasi N:

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(i)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_N(\Omega) d\Omega = \int_0^{f_C} P_N(f) df ; \quad (P_N(f) = T_C S_N)$$



Metodo di Welch: dettagli sull'applicazione

- vi sono anche **finestre** particolarmente adatte all'analisi spettrale: **Chebyshev, Gauss, Nuttall, etc.**
- per non avere modificazioni dei valori di potenza le finestre vanno scalate in modo da avere media quadratica unitaria
- per poter tracciare lo spettro con una buona risoluzione grafica occorrono in genere più degli M punti di FFT; si può interpolare i campioni in frequenza mediante zero padding nel tempo (questo non aumenta la vera risoluzione in frequenza)
- **campioni ai bordi delle finestre raccordate a zero sono pesati poco e quindi si può adottare una sovrapposizione (overlap) fra finestre adiacenti (in genere del 50%) avendo così $2K-1$ spettri da mediare**



Risposte evocate od evento relate

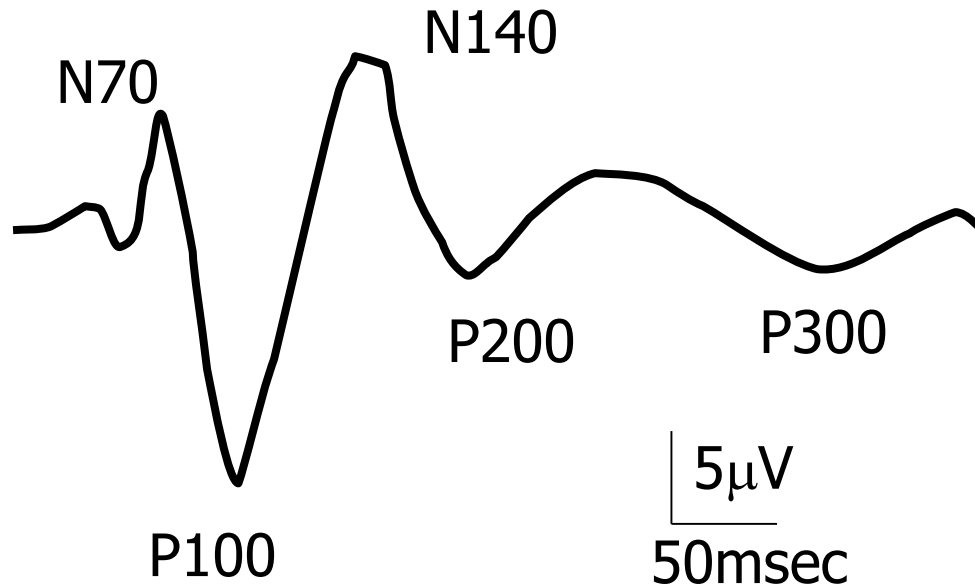
- è frequente lo studio di risposte fisiologiche evocate da un evento esterno (e.g., uno stimolo sensoriale) che può essere ripetuto un numero indefinito di volte
- anche se la risposta è nascosta da un SNR sfavorevole, può essere estratta attraverso un procedimento di **media sincrona**
- nella maggior parte dei casi la risposta di interesse riguarda i potenziali relativi alla attivazione di vie nervose (tratti, nuclei o gangli, aree corticali) a seguito di uno stimolo: per questo si parla di **potenziali evocati**
- altre volte si rilevano potenziali nervosi legati ad una azione volontaria: si parla di **potenziali evento relati**
- si analizzano anche risposte diverse da potenziali; e.g., in tempi recenti la risonanza magnetica funzionale permette di analizzare le variazioni di ossigenazione in aree corticali evocate od evento relate

Potenziali Evocati (PE)

- Cosa sono:
 - Risposte elettriche a stimoli sensoriali con elettrodi sulla superficie corporea (quasi sempre sullo scalpo).
- A cosa servono
 - Diagnosi di lesioni nel particolare sistema sensoriale esaminato (uditivo, visivo, somatico).
 - Evidenziano disfunzioni dell'intero sistema nervoso.
- I PE sono classificabili a seconda della sede che genera il campo elettrico.
 - Risposte delle aree corticali. $0,5 - 670$.
 - Risposte dei nuclei intermedi (potenziali del tronco encefalico - *brain stem responses*).
- Il SNR è tanto sfavorevole che senza l'operazione di media sincrona i PE sono comunemente non visibili
- Freq. stimolo scelta in modo che valga l'ipotesi che l'intero sistema torni allo stato iniziale prima dello stimolo successivo

Potenziali Evocati- Rappresentazione

Ampiezza in funzione del tempo di un PE (e.g., visivo) ottenuto da immagini strutturate alternanti (pattern reversal)



Le onde positive sono rappresentate verso il basso (P), quelle negative verso l'alto (N). Il numero indica la **latenza caratteristica** cioè l'intervallo dall'inizio della presentazione dello stimolo

Su una risposta si misurano i valori di **ampiezza** e **latenza** dei picchi

Potenziali Evocati (PE)

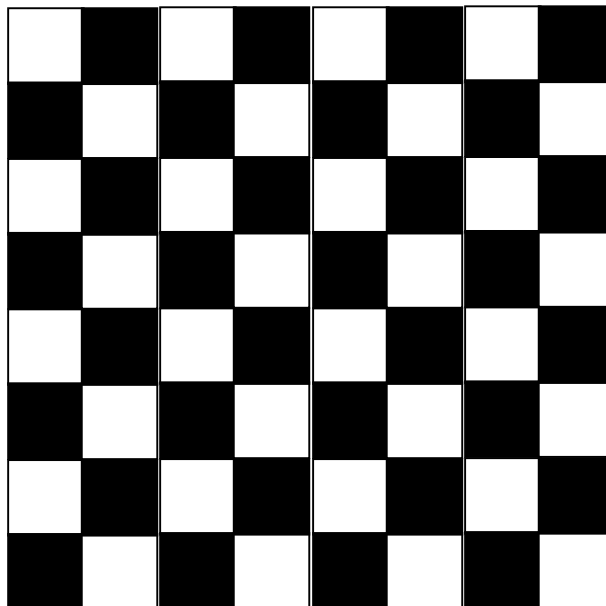
- I **potenziali evocati sensoriali** si originano in seguito alla stimolazione di un organo sensoriale quale l'occhio, l'orecchio la cute con uno stimolo visivo, acustico ed elettrico, rispettivamente.
- Grazie al PE può essere studiato il percorso dello stimolo dalla periferia al sistema nervoso centrale.
- **Tipo di stimolo**
 - PE Acustici**
 - Click, Burst;
 - PE Visivi**
 - Flash
 - Immagini strutturate fisse (righe/scacchiere)
 - Immagini strutturate alternanti (pattern reversal)
 - PE Somatosensoriali**
 - Impulsi elettrici o meccanici applicati alla cute

Potenziali Evocati

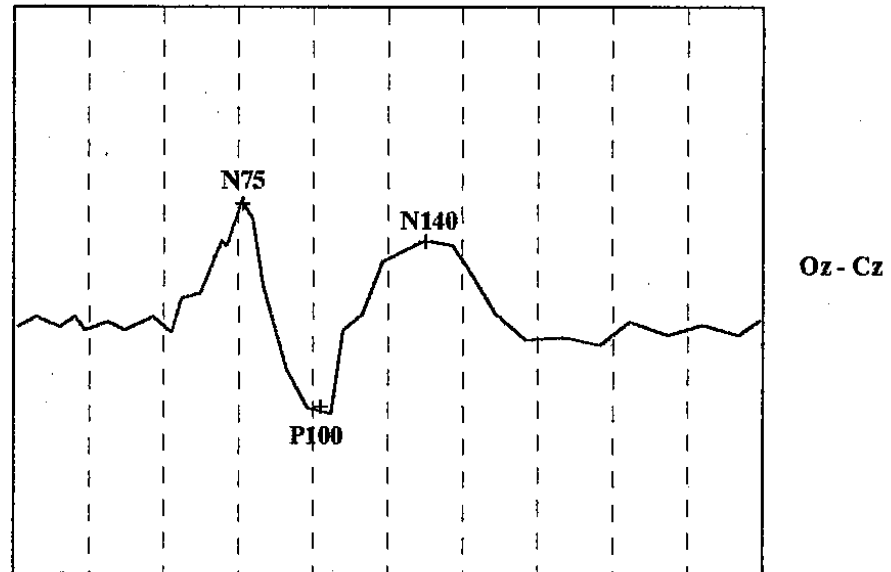
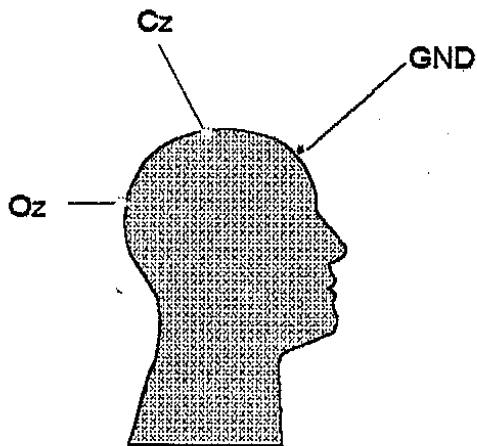
- I PE sono distinti in base alla latenza ovvero in base alla finestra temporale del t_{pS} che viene focalizzata:
 - Componenti **precoci** (≤ 20 msec)
relative alle vie nervose ed al tronco encefalico
 - Componenti **intermedie** (20-200 msec)
relative alle aree corticali sensoriali
 - Componenti **lente** (fino oltre 300 msec)
relative a processi corticali cognitivi
- questa distinzione ha un'importanza pratica; infatti, anche se uno stesso stimolo evoca tutte e tre i tipi di risposta in successione, per focalizzare una di queste si adottano diversi accorgimenti tecnici circa: 1) il tipo di stimolo, 2) la posizione degli elettrodi, 3) il numero di ripetizioni, 4) la cadenza di ripetizione, 5) l'amplificazione, 6) la banda amplificata

Potenziali Evocati Visivi

- sono potenziali di media latenza misurati a livello della corteccia visiva occipitale
- si usano stimoli quali flash, ma lo stimolo più frequente è quello di “**pattern reversal**”: si presenta su un monitor una figura a scacchi bianchi e neri e l’inversione improvvisa dei colori rappresenta lo stimolo; il picco più significativo è il **P100**

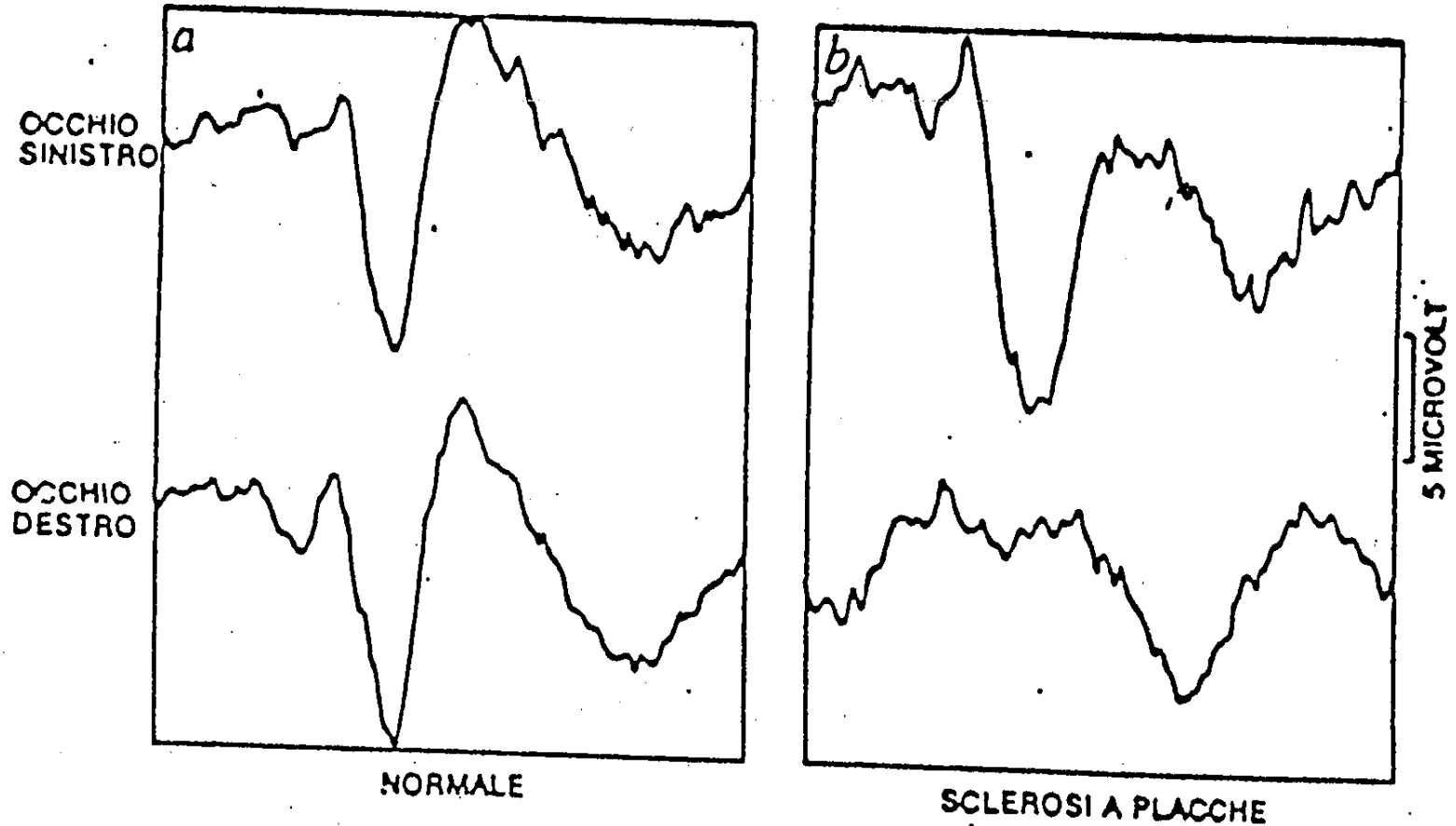


Potenziali Evocati Visivi



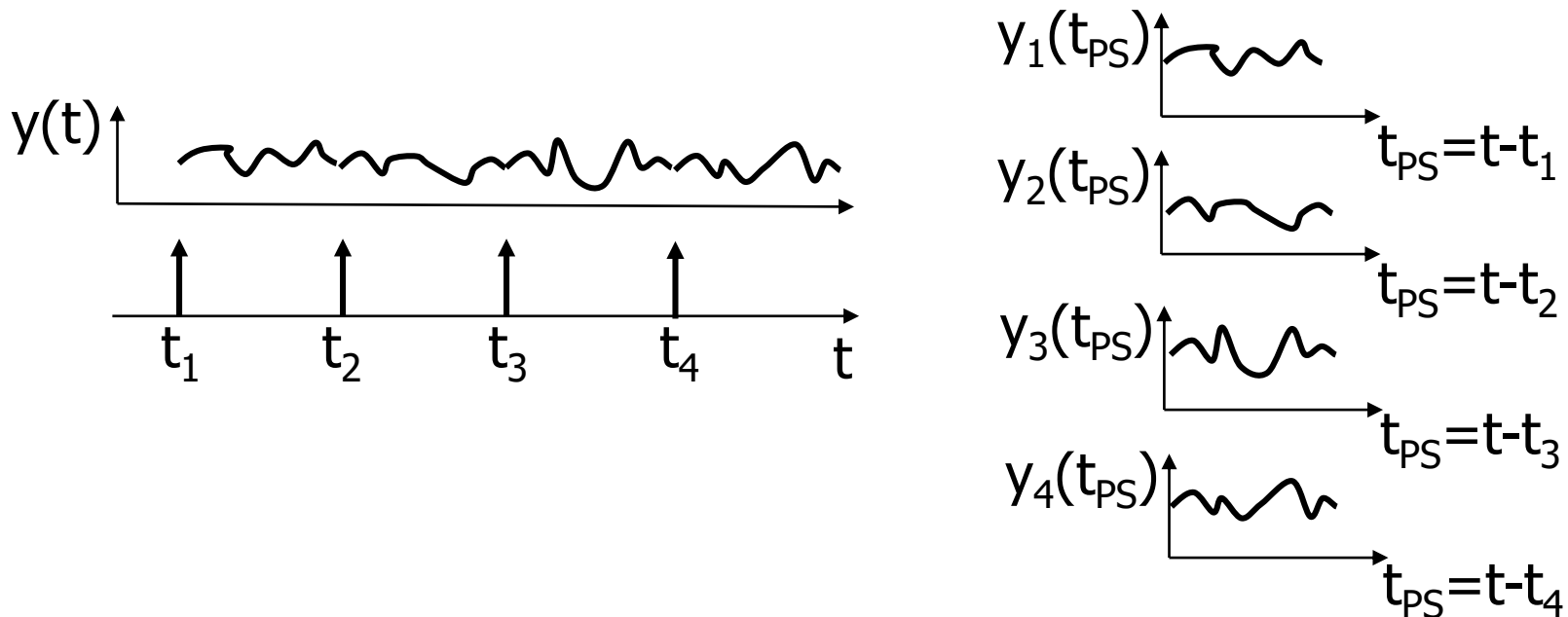
25 msec/div

Potenziali Evocati Visivi - P100



Media sincrona - Averaging

- si passa da un segnale $y(t)$ funzione del tempo assoluto ad N segnali ($N =$ ripetizioni dello stimolo), $y_k(t_{PS})$, funzioni del tempo riferito all'istante dello stimolo, t_{PS} (**tempo Post Stimolo**)



- si ottengono così N realizzazioni di un processo stocastico stazionario rispetto a t_{PS} : è proprio la componente stazionaria legata allo stimolo che vogliamo estrarre

Media Sincrona - Averaging

- Metodo di elaborazione largamente utilizzato nella strumentazione clinica: Averaging o Media Sincrona
- sia $s(t_{PS})$ il PE desiderato; sia $n_k(t_{PS})$ il rumore sovrapposto (prevalentemente l'EEG di fondo);
- Ipotesi:
 - 1) additività segnale + rumore per produrre la singola risposta evocata: $y_k(t_{PS}) = s(t_{PS}) + n_k(t_{PS})$
 - 2) Il contributo del segnale ad ogni singola ripetizione è lo stesso, cioè $s(t)$ non varia al variare dell' i -esima ripetizione
 - 3) Il rumore è un processo casuale stazionario, scorrelato, a valore medio nullo e varianza σ^2

Media Sincrona - Averaging

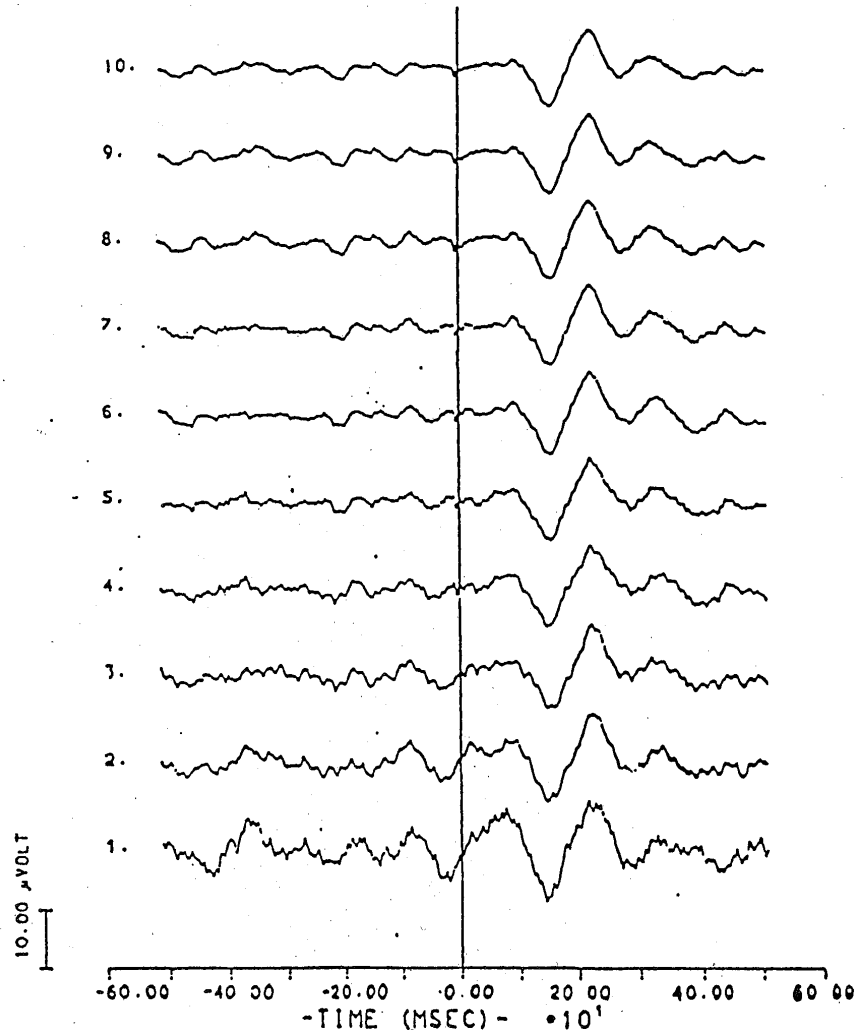
- il valore atteso del processo $E(y_i(t_{PS}))=m(t_{PS})$ è stazionario se riferito al tempo post-stimolo e coincide con il segnale
 $m(t_{PS}) = s(t_{PS})$
- uno stimatore del valore atteso è la **media campionaria** su **N ripetizioni** della risposta evocata:

$$\bar{y}_N(t_{PS}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k(t_{PS}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (s(t_{PS}) + n_k(t_{PS})) = s(t_{PS}) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N n_k(t_{PS})$$

- $s(t_{PS})$ rimane inalterato dal processo di media
- a questo è sommata la media di N rumori indipendenti
- la componente di rumore ha ancora valore atteso nullo ovvero la media dei rumori indipendenti $\rightarrow 0$ per $N \rightarrow \infty$
- è noto dalla statistica che il rumore mediato ha ampiezza rms pari a σ/\sqrt{N}

Media sincrona

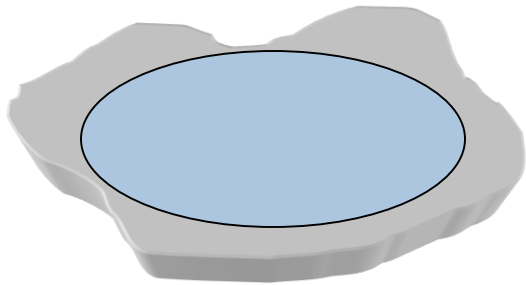
- nell'esempio mostrato si vede (dal basso verso l'alto) l'effetto dell'incremento di N da 1 a 10 sul rumore: l'ampiezza di questo decresce di un fattore $\sqrt{10}$ ed il SNR aumenta di un pari fattore
- in casi comuni sono usuali SNR tali da non vedere il PE senza averaging e N di ripetizioni pari a 100 o 1000
- e.g., EEG 50 μV rms
PE 5 μV rms
SNR singola risp -20db
con N=100
SNR average 0 db



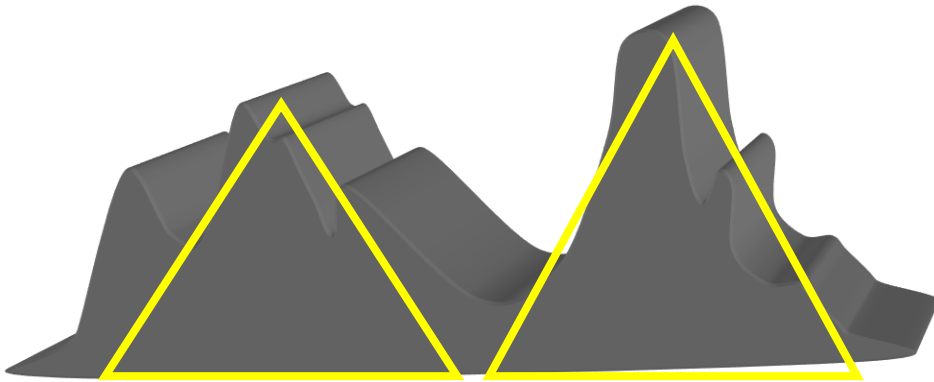
Dimensione euclidea

- dimensione euclidea D_E indica il numero di coordinate necessarie a specificare un oggetto in un certo spazio:
 - $D_E = 1$ un punto sulla retta
 - $D_E = 2$ un punto nel piano
 - $D_E = 3$ un punto nello spazio

Nuvole, montagne, coste....secondo Euclide???

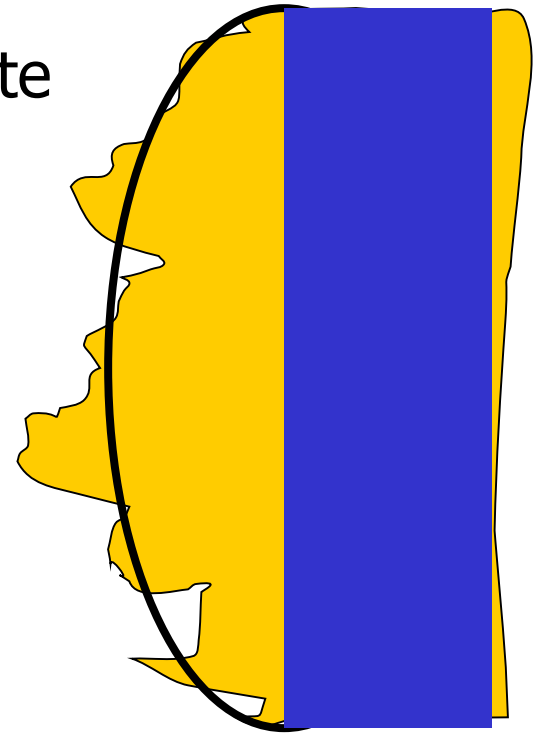


nuvola

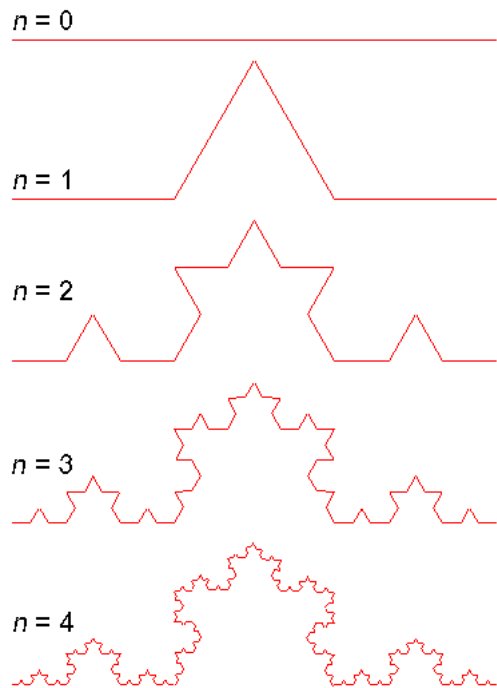


montagne

coste

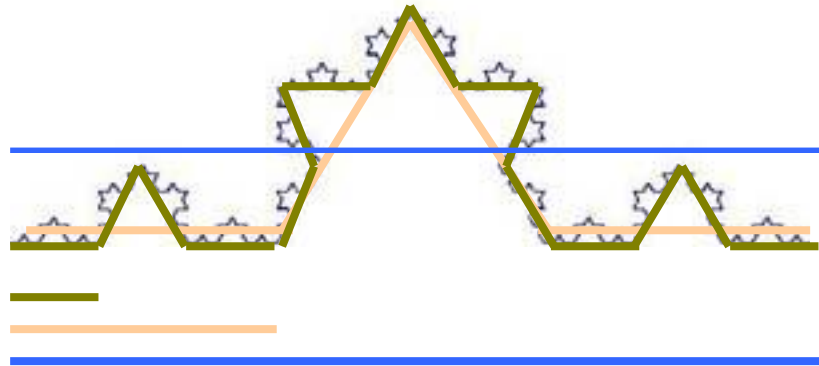
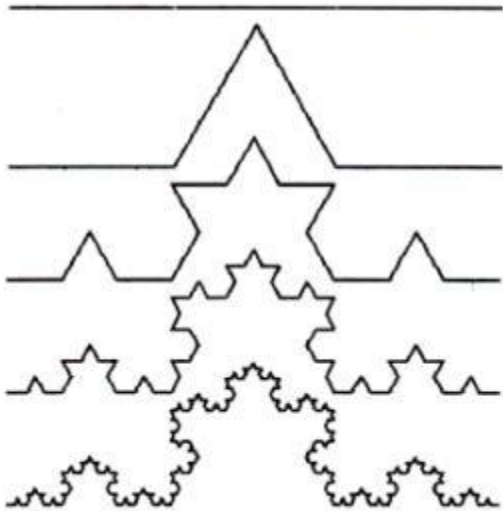


Curva di Koch



- segmento unitario diviso in 3 parti
- sostituzione del terzo interno con due lati di un triangolo equilatero di lato $1/3$ (cioè' la lunghezza del segmento sostituito)
- sostituzione del terzo interno di ogni lato con triangolo equilatero di lato uguale al segmento sostituito

Curva di Koch



l_0

Unità di misura

**Lunghezza apparente
della curva**

(———) l_0

l_0

(———) $1/3 l_0$

$4/3 l_0$

(———) $1/9 l_0$

$16/9 l_0 = (4/3)^2 l_0$

(.....) $(1/3)^n l_0$

$(4/3)^n l_0$

d-misura della curva di Koch

$$m_d(X) = \lim_{\rho \rightarrow 0} N(\rho) \cdot \rho^d = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n / 3^{nd} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{n(\log 4 / \log 3)} / 3^{nd}$$

$$0 < m_d(X) < \infty \iff d = \log 4 / \log 3$$

$$\mathbf{D_H = \log(4) / \log(3) = 1.2618.....}$$

Dimensione curva di Koch

- Per ogni lato della curva il numero di ricoprimenti al passo n e' proporzionale a 4^n e il fattore di magnificazione e' proporzionale a $\rho=1/3^n$



$$D_C = \lim_{\rho \rightarrow 0} \log(N)/\log(1/\rho)$$

$$D_C = D_H = \log(4)/\log(3) = 1.2618.....$$

- E la dimensione topologica?...

$$D_T = 1$$

Oggetto frattale

- Un frattale è un oggetto la cui dimensione di Hausdorff-Besicovitch è strettamente maggiore della sua dimensione topologica:

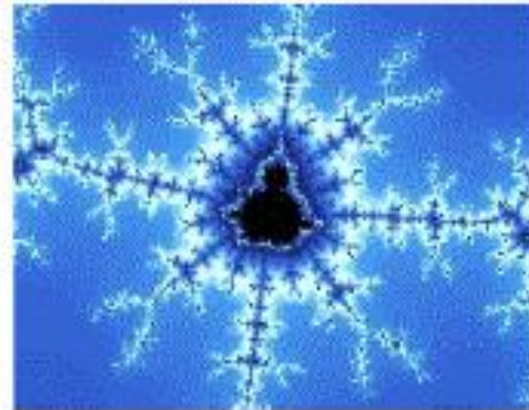
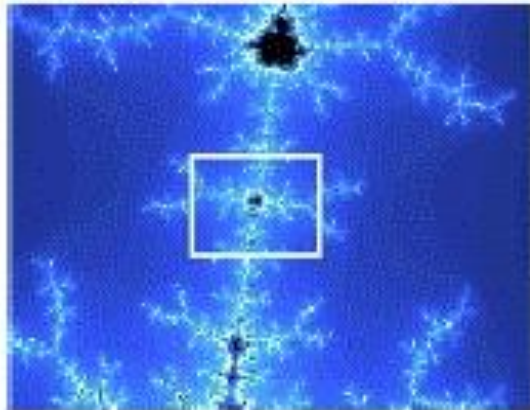
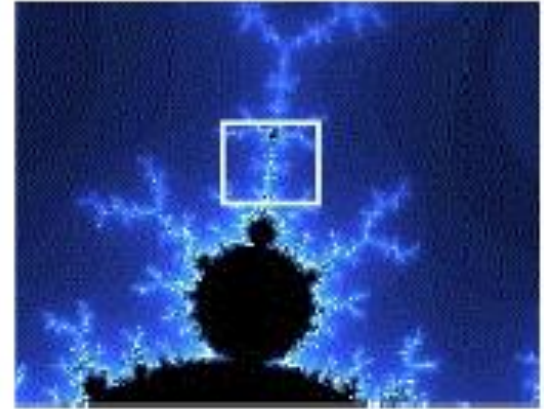
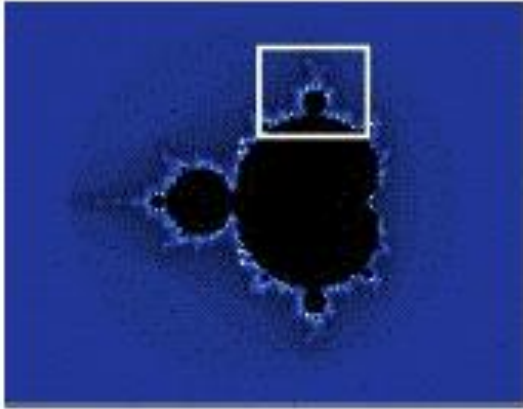
$$D_H > D_T$$

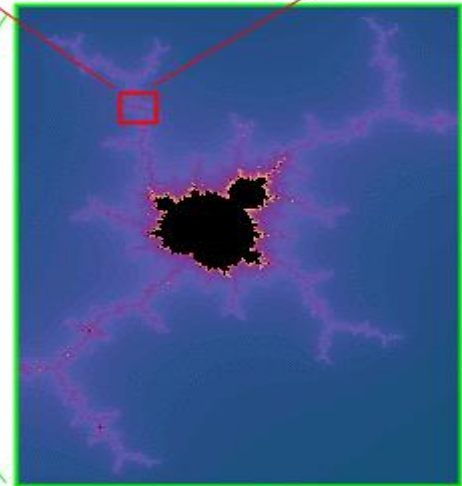
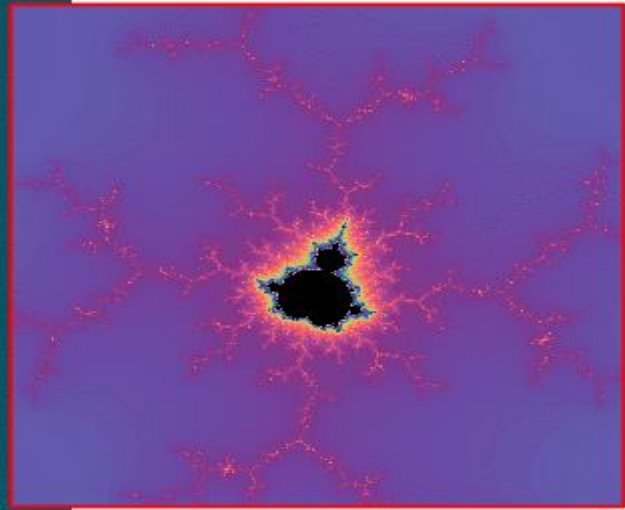
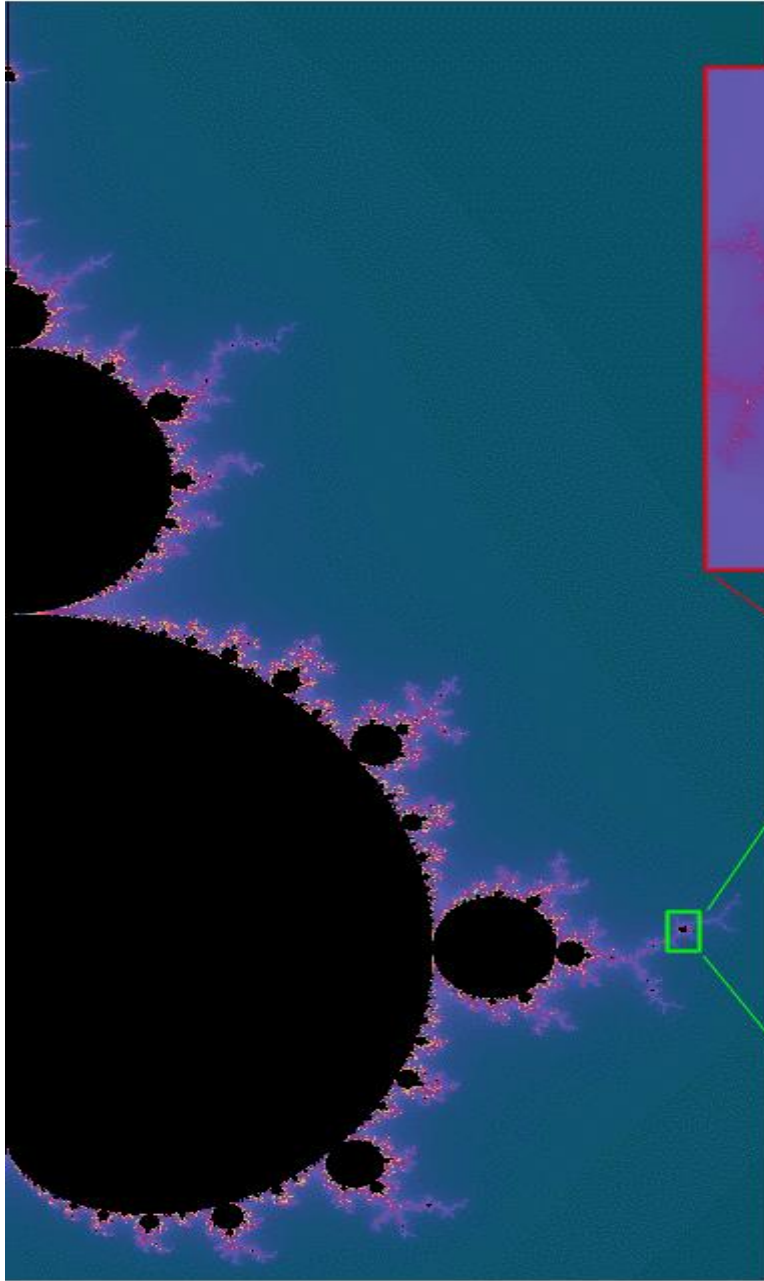
- Ogni oggetto la cui dimensione di Hausdorff-Besicovitch è non intera è frattale

Gli oggetti frattali

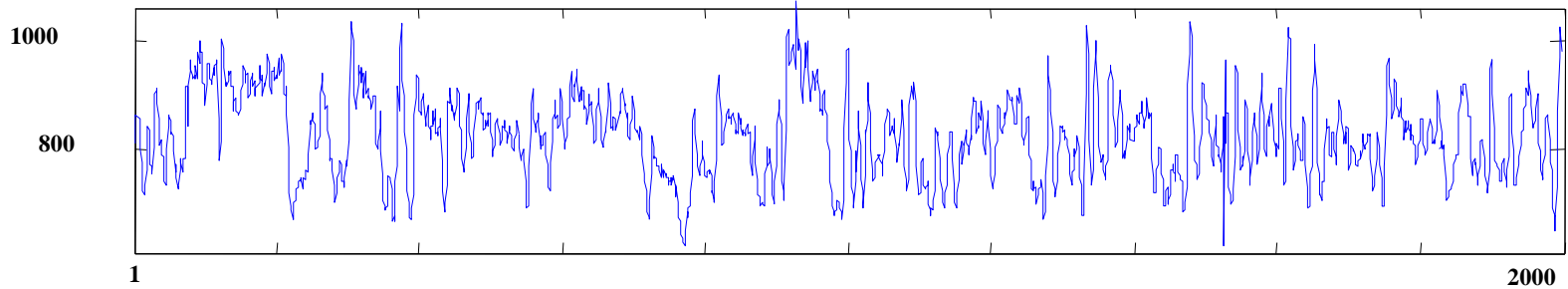
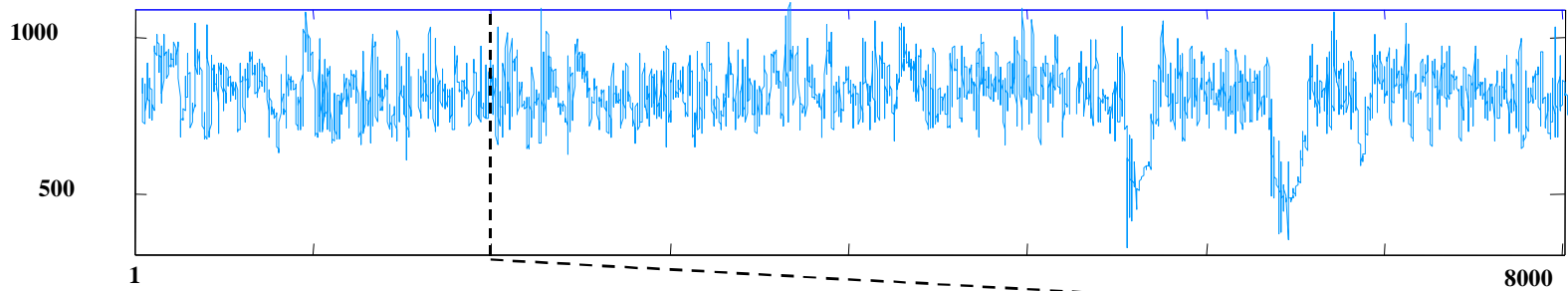
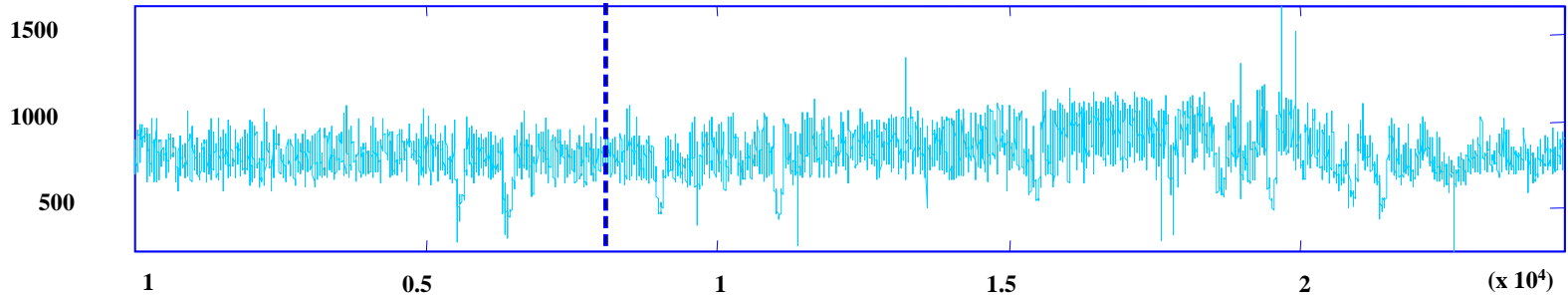
- Sono autosimili
- la loro misura, intesa in senso euclideo, non converge ad un numero finito
- si possono costruire per iterazione
 - per addizione
 - per sottrazione
- attrattori di sistemi caotici (o loro frontiera)

Insieme di Mandelbrot





Serie temporali



Proprietà dei processi autosimili

- X_t processo stocastico autosimile con parametro di autosimilarità H e autocorrelazione $\{\rho_k\}$
 - $\rho_k = ck^{-\lambda}, \lambda = 2H-1$
 - Densità spettrale a legge di potenza: $1/f^\beta$, $\beta > 0$, $\beta = 2H+1$
 - Varianza: decade molto lentamente
 - $\rho_k^{(m)} = \rho_k$

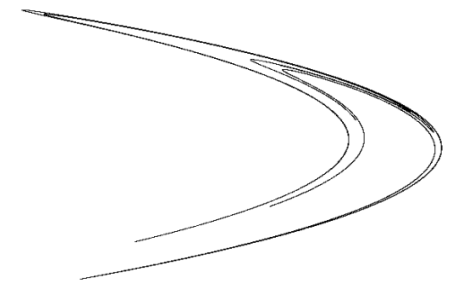
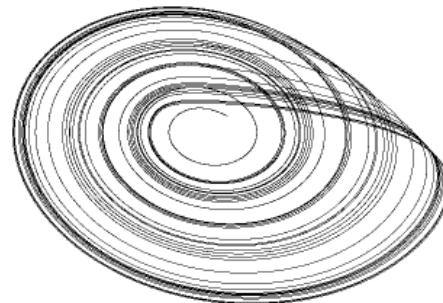
Dimensione di Lyapunov (Kaplan-Yorke)

$$D_L = D_{KY} = \nu + (1 / |\lambda_{\nu+1}|) \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i$$

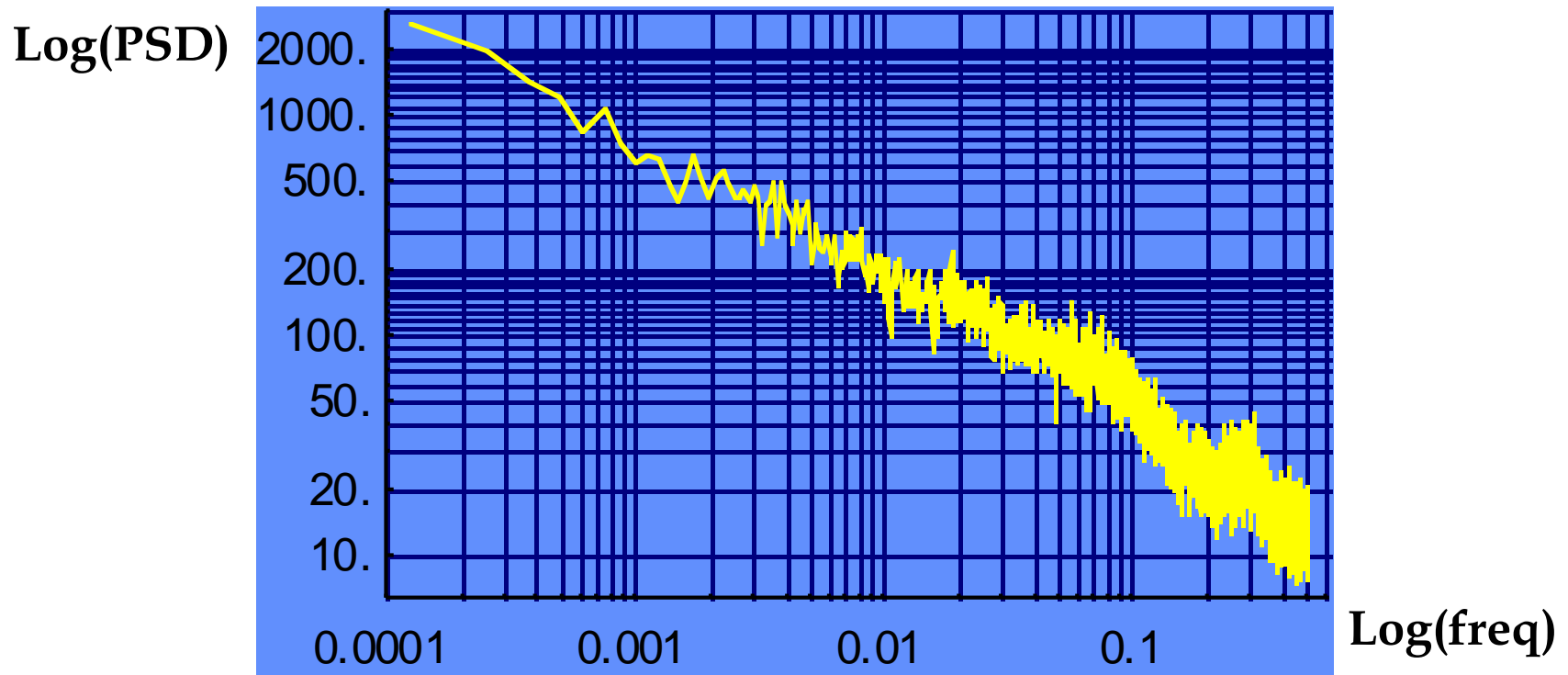
- i varia da 1 a ν , dove ν e' il piu' alto intero per cui la somma dei primi ν esponenti e' positiva cioe':

$$\mu(\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i > 0$$

- e' una misura che tenta di caratterizzare un attrattore prendendo in considerazione anche le sue caratteristiche dinamiche



power spectral density: log-log plot



$$\text{Log}_{10}(P) = m * \text{Log}_{10}(f) + q$$

$$10^{\text{Log}_{10}(P)} = 10^{[m * \text{Log}_{10}(f) + q]}$$

$$P = 10^{[\text{Log}_{10}(fm) + q]} = 10^{\text{Log}_{10}(fm)} * 10^q$$

$$P = f^m * 10^q \quad k = 10^q$$

$$P = k / f^{-m}$$

-m= numero positivo! che
chiamiamo beta exponent

- **Processo stocastico (casuale) → analisi lineare** (trasformata di Fourier)
- **Processo deterministico → analisi non lineare**

Analisi non lineare del segnale

MODELLO DETERMINISTICO

Date le condizioni iniziali è possibile scrivere un'equazione che in ogni istante definisce il segnale.

Esiste un approccio deterministico in grado di generare un segnale che somigli ad un segnale casuale pur non essendolo?

Sì, è possibile modellizzare il generatore del segnale attraverso combinazioni di una certa variabile espressa non solo in forma lineare, ma anche non lineare.

DERIVATE

La derivata è la velocità di variazione di una grandezza.

Per capire:

$$V = (S_0 - S_1) / (t_0 - t_1)$$

- La velocità è uguale alla derivata dello spazio nell'unità di tempo, cioè quanto spazio percorro in un arco di tempo.
- L'accelerazione è uguale alla derivata della velocità, cioè la velocità con la quale varia la velocità.

La derivata ci serve perché:

Il generatore del segnale elabora le derivate di una sorgente creando il segnale.

Un esempio di segnale potrebbe essere:

$$\mathbf{y = D' + D'' + D'''}$$

I sistemi si modellizzano attraverso un insieme di derivate.

STATO DI EQUILIBRIO

Ci sono 3 stati di equilibrio:



-*stabile*: la pallina torna al punto di partenza grazie ad una sorta di attrazione e alla fine della perturbazione il movimento cessa

-*instabile* la pallina si allontana sempre più dal punto di partenza

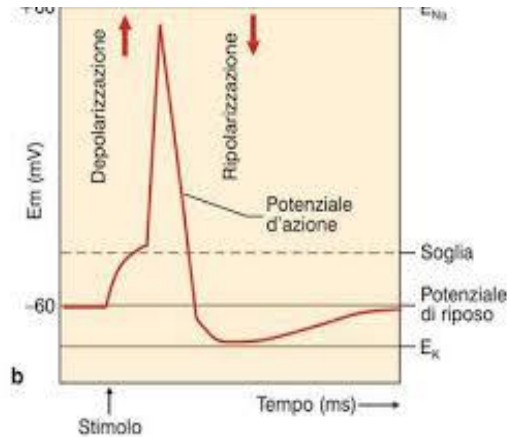
-*indifferente* finita la perturbazione il movimento cessa in un'altra posizione

Nell'**equilibrio stabile** da qualunque parte la pallina venga perturbata, torna nello stesso punto, che definiamo punto di attrazione.

Conoscendo tutte le caratteristiche che influenzano il movimento della pallina (forma della pallina, forza esercitata, forma della ciotola, etc.) è possibile determinare in ogni momento la traiettoria che seguirà.

Le coordinate per definire il sistema che genera un segnale EEG, possono essere molte (più di 3). Infatti le coordinate dipendono da quante volte viene derivata una variabile.

L'insieme di tutte le coordinate determina la *dimensione del sistema*, definita anche *complessità del sistema*.



POTENZIALE D'AZIONE

La forma caratteristica di un potenziale d'azione presenta un picco e una discesa che va al di sotto del potenziale di riposo.

Il segnale EEG è formato da più potenziali d'azione.

Nella registrazione EEG quello che viene osservato è la somma di tanti potenziali d'azione derivati due volte.

→ Il potenziale d'azione ha una forma diversa da quella che vediamo nella registrazione EEG.

Così come una pallina può ipoteticamente percorrere infinite traiettorie, ma viene limitata da alcuni fattori per cui ne percorre solo una, allo stesso modo il generatore del segnale EEG viene limitato da n fattori che determinano la direzione dell'evoluzione nello spazio a n dimensioni.

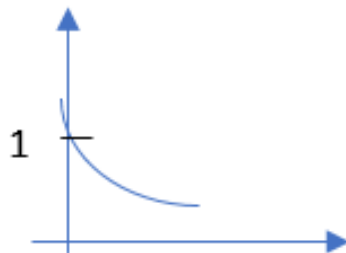
Grazie a metodi matematici è possibile osservare il segnale attraverso un'unica dimensione, il tempo.

La relazione del segnale nel tempo è:

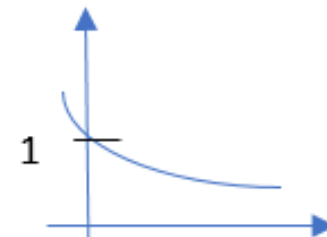
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_1 e^{-t/\tau_1} + \mathbf{A}_2 e^{-t/\tau_2}$$

$$\mathbf{x(t)} = \mathbf{A_1 e^{-t/\tau_1} + A_2 e^{-t/\tau_2}}$$

- Dove e è l'esponente naturale, una costante (2,81) e τ_1, τ_2 sono le costanti di tempo.
- **L'esponenziale** $(-t/\tau_1, -t/\tau_2)$ determina la curvatura del segnale: al crescere di τ il segnale decresce più lentamente.



$\tau = 1$



$\tau = 100$

Quindi con questa formula è possibile caratterizzare il segnale con pochi numeri: n coefficienti, n dimensioni, n costanti di tempo.

Uno dei modi per quantificare la dimensione del sistema (n) è utilizzare la **dimensione frattale**.

Analisi non lineare del segnale

DIMENSIONE FRATTALE

La dimensione frattale è un valore compreso tra 1 e 2. Questo non indica il valore esatto di n , ma un valore proporzionale alla complessità del segnale e del sistema che lo ha generato.

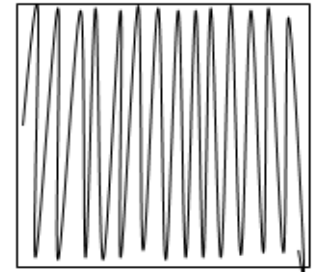
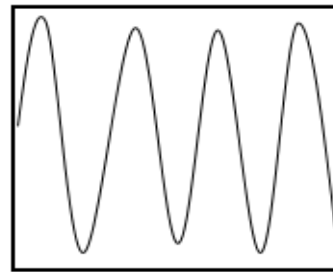
Tanto più è grande la dimensionalità del mio sistema tanto più grande sarà la dimensione frattale e tanto più complesso è il mio sistema, al contrario tanto più sarà piccola la dimensione tanto più sarà piccola la dimensione frattale.

Analisi non lineare del segnale

DIMENSIONE FRATTALE

Più il segnale risulta frastagliato, tanto più il valore si avvicina a 2.

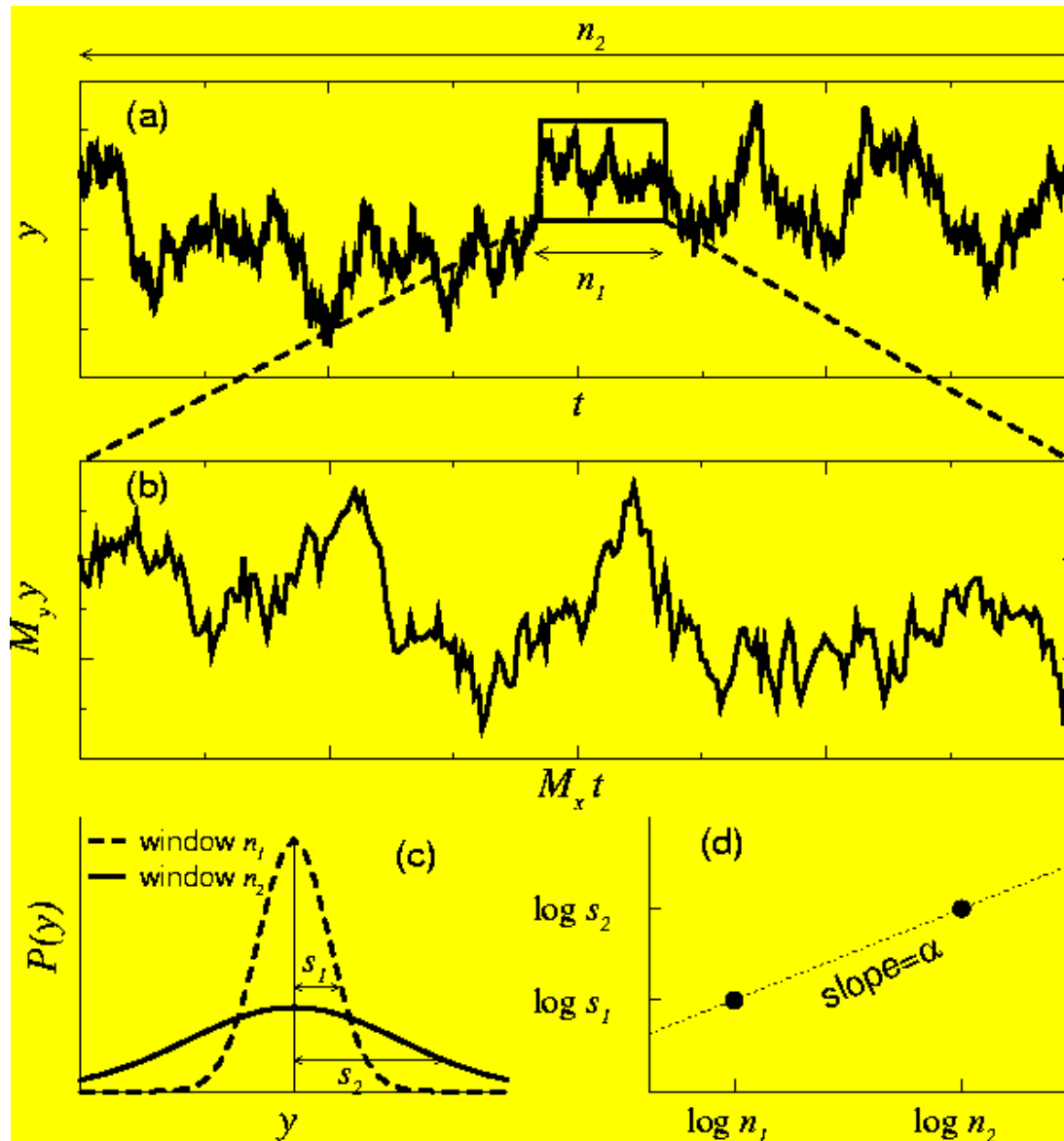
Al contrario, un segnale semplice, sinusoidale corrisponde ad un valore vicino a 1.



Questo concetto è legato a come è possibile misurare una curva. Si rapporta la dimensione di una unità (l) e il numero di volte (n) con cui si ripete per coprire tutta la lunghezza della curva.

Se su un diagramma riporto il $\log(n)$ in funzione del $\log(l)$ per le varie misurazioni, otterrò una retta la cui pendenza rappresenterà la dimensione frattale

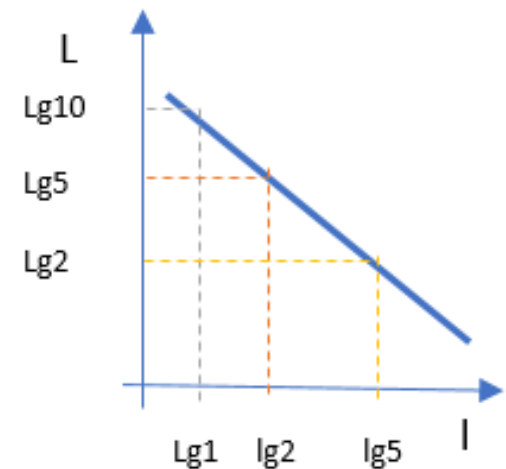
Autosimiglianza di una serie temporale



Analisi non lineare del segnale

DIMENSIONE FRATTALE

La dimensione frattale indica anche la velocità con la quale varia la velocità del segnale. Utilizzando il logaritmo della lunghezza totale dell'onda (L) e il logaritmo della lunghezza dell'unità (l) è possibile trovare una retta la cui pendenza è la dimensione frattale.



$$y = mx + q \quad \text{allora} \quad D(f) = -m$$

Analisi non lineare del segnale

COEFFICIENTI DI LYAPUNOV (λ)

Indicano quanto velocemente cambia nel tempo una componente del segnale.

Si calcola con l'inverso di $\tau \rightarrow \lambda = 1/\tau$

Se λ ha un valore elevato significa che il segnale (e quindi l'informazione) cambia velocemente secondo una determinata variabile/direzione

In genere il parametro che si estrae è il **coeff. di Lyapunov massimo**, se questo è piccolo il segnale cambierà poco, se è grande avrà un cambiamento veloce.

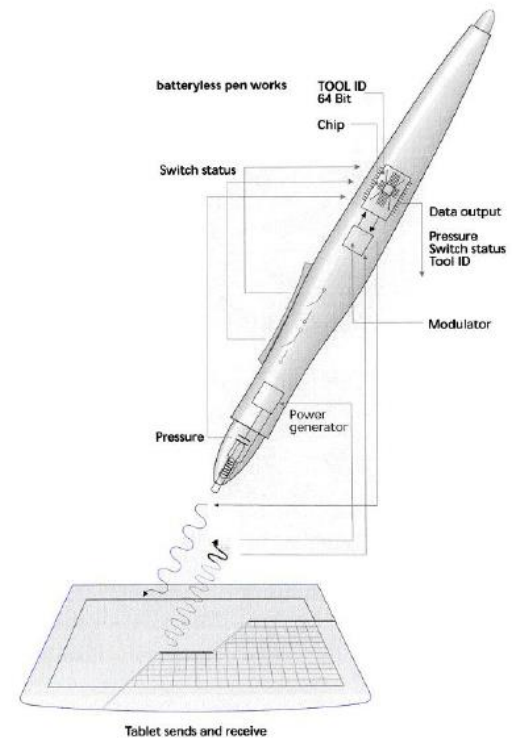
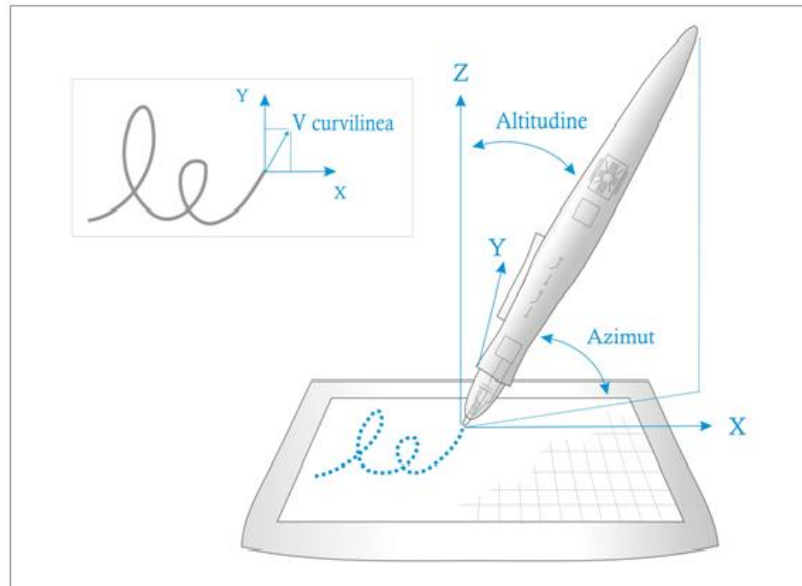
Analisi non lineare del segnale

Quindi i parametri che è possibile utilizzare per caratterizzare un segnale nell'analisi non lineare sono:

- i **coefficienti di Lyapunov**, legati alla velocità di variazione del segnale;
- la **dimensione frattale**, proporzionale alla complessità del sistema.
- Esponente beta.....
- Per EEG, Dim Frattale = $1 + (3 - \beta \exp) / 2$

ANALISI DEI MOVIMENTI DURANTE LA SCRITTURA

- Tavoleta grafica



Caratteristiche Tavoleta grafica:

Formato A4 (area attiva 30cm x 23cm)

Risoluzione x e y: 200 linee per mm (5 μ m)

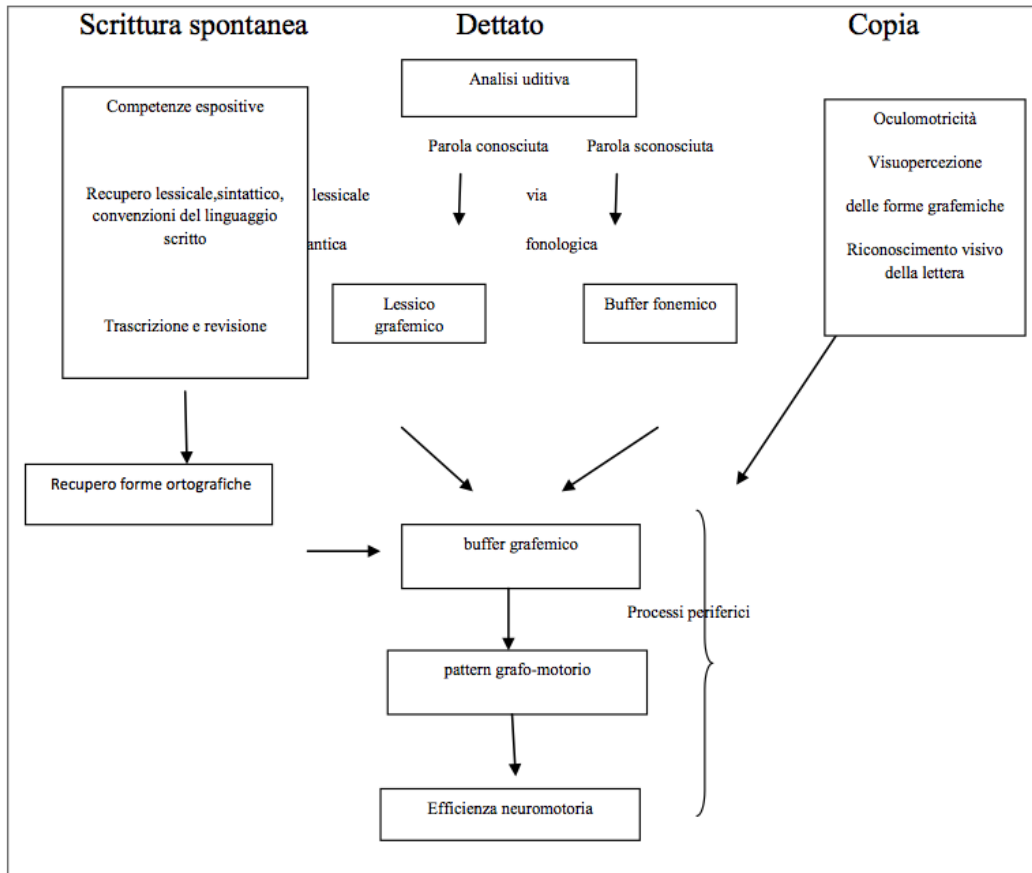
Fc=200Hz

Pressione=1024 livelli

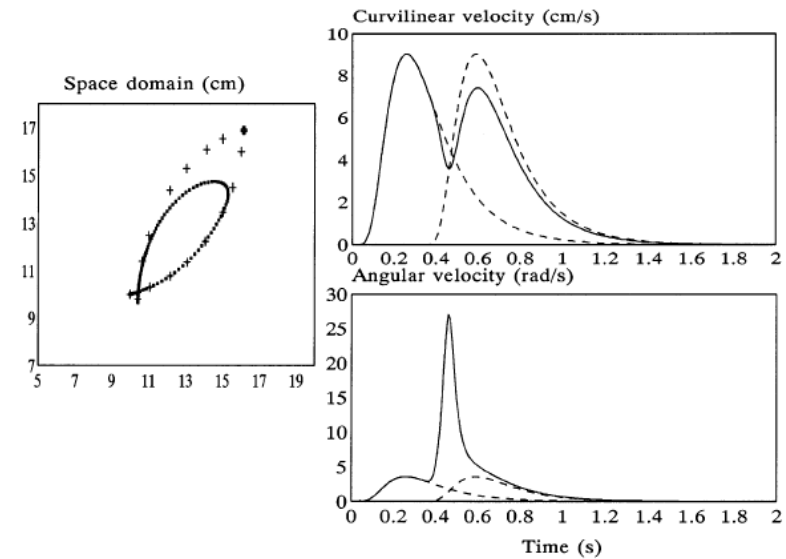
Si ricavano: Velocità e accelerazioni lungo X, Y e lungo la curva (filtrati tra 10 e 20Hz)

Componenti e stroke e loro parametri (vel media e di picco, durata, durata sollevamenti, #stroke e #componenti, pressione, altitudine, azimut, lunghezza, altezza, distanza tra simboli, frequenza oscillazioni: tremori tra 4 e 5Hz,)

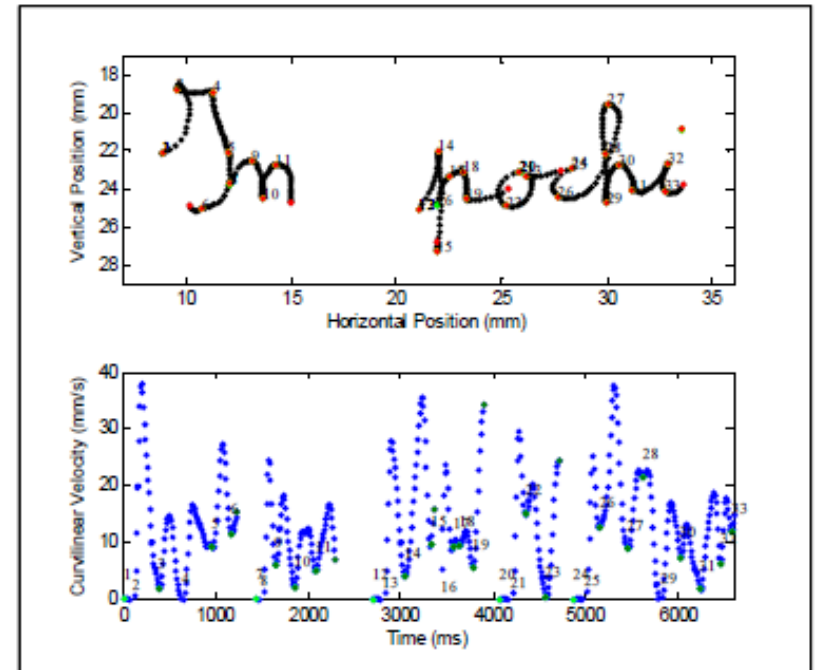
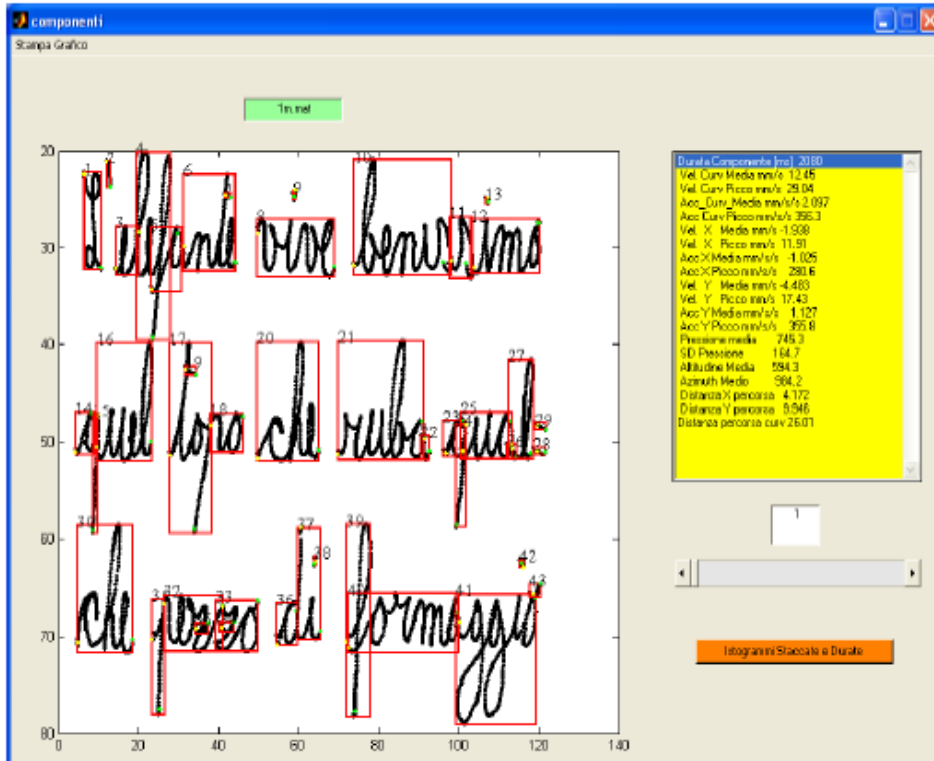
Modello neuropsicologico della scrittura



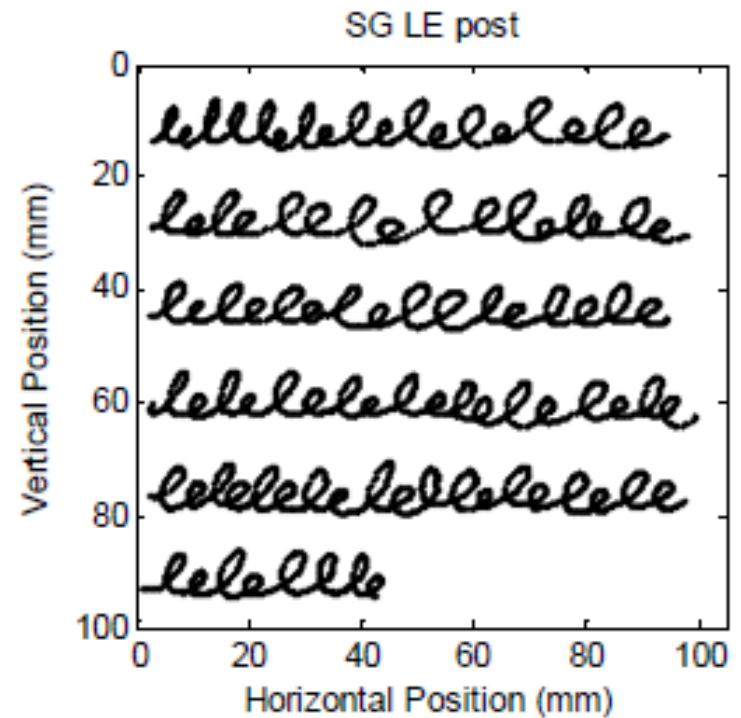
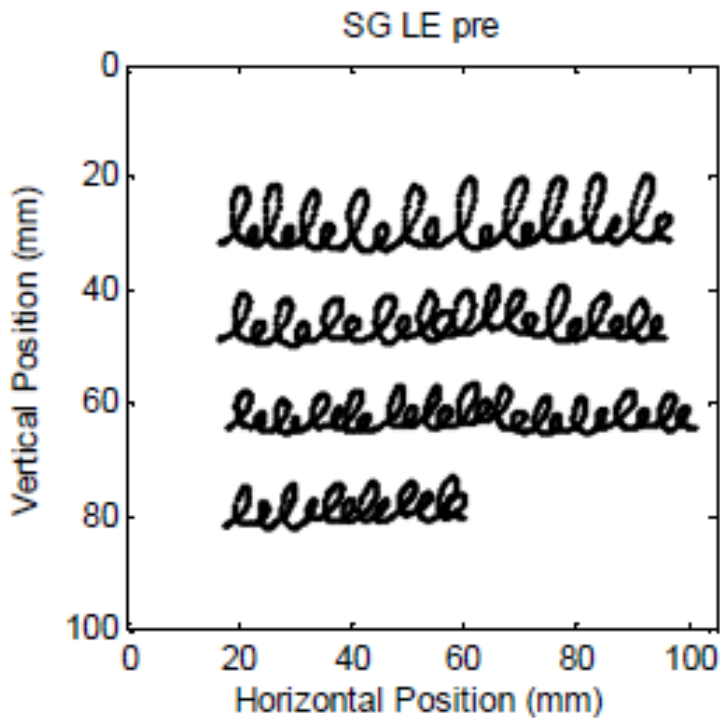
Profilo velocità a 'campana'



Identificazione componenti e strokes

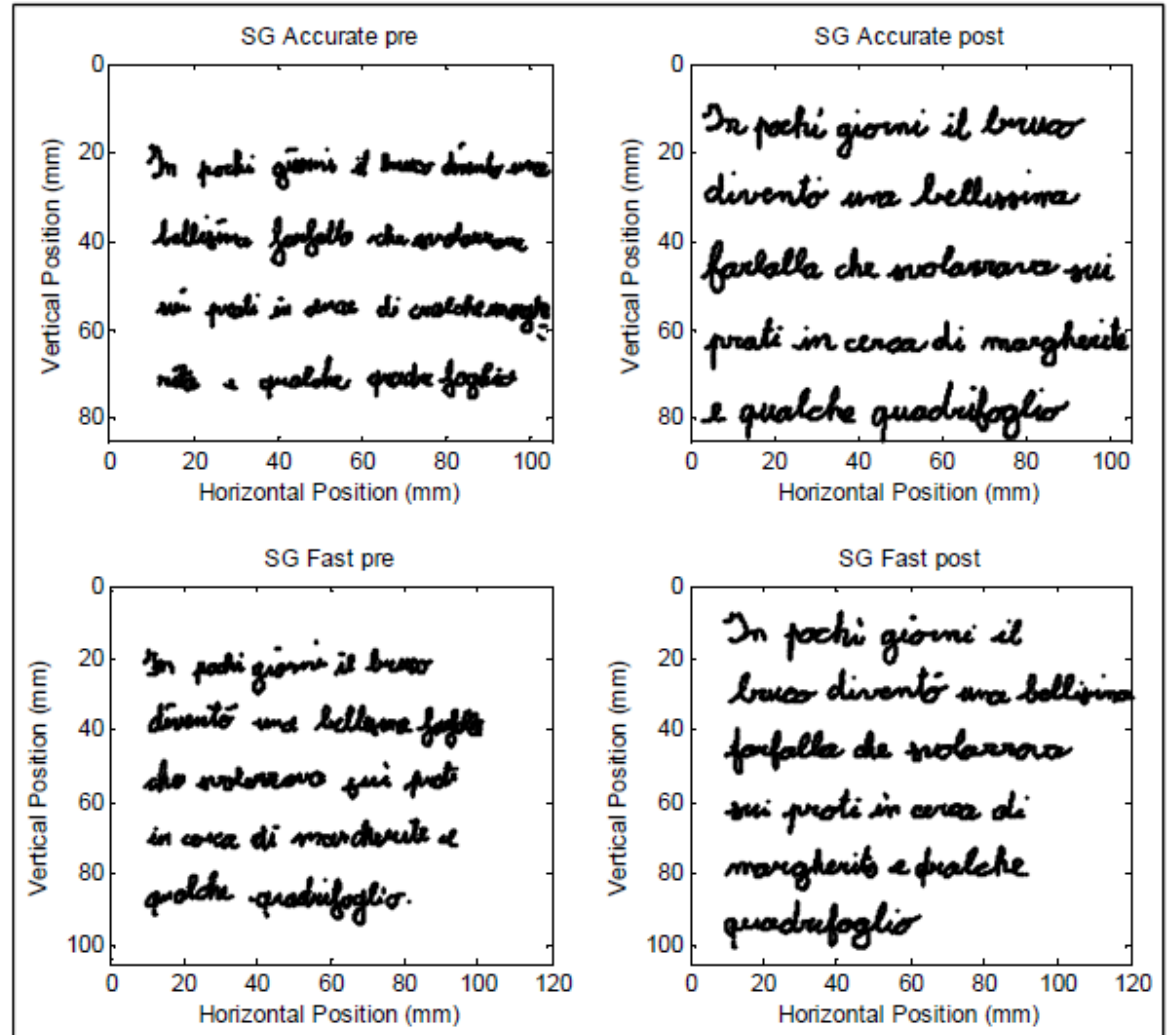


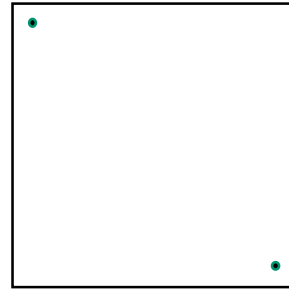
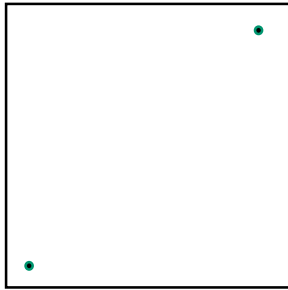
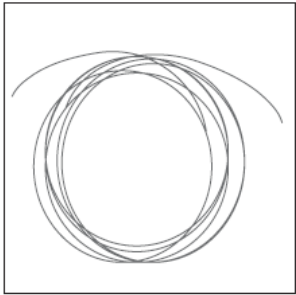
DISGRAFIA: Esempio prima e dopo esercizi di riabilitazione



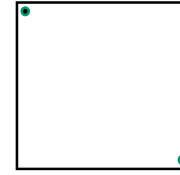
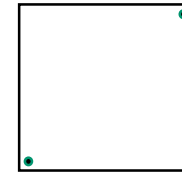
DISGRAFIA

Test Accurato e Veloce prima e dopo esercizi di riabilitazione

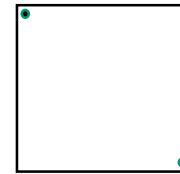
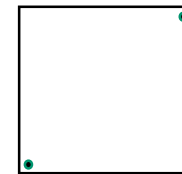
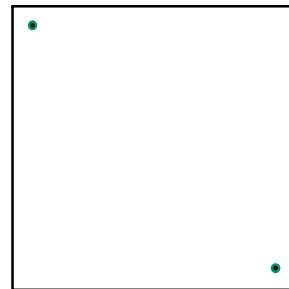
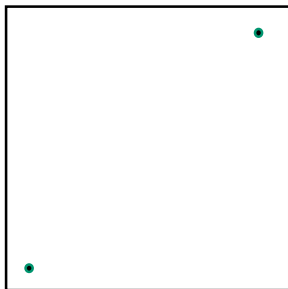
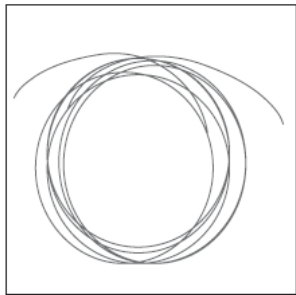




Test per studio tremore



Accurato



Veloce

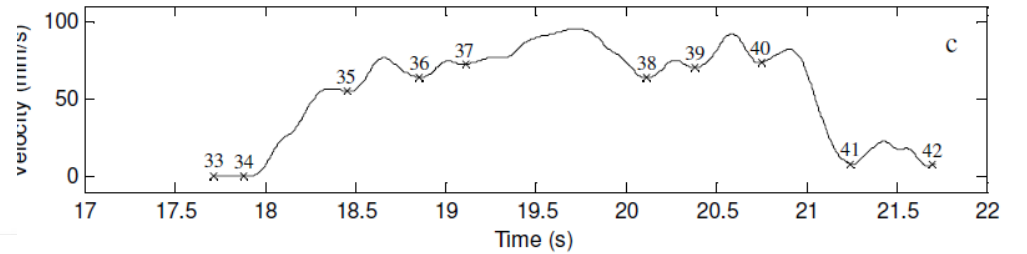
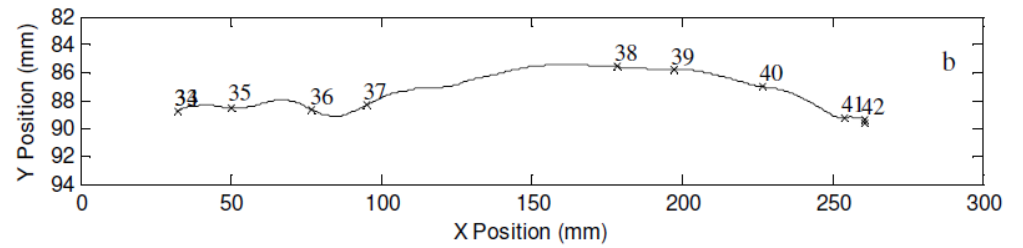
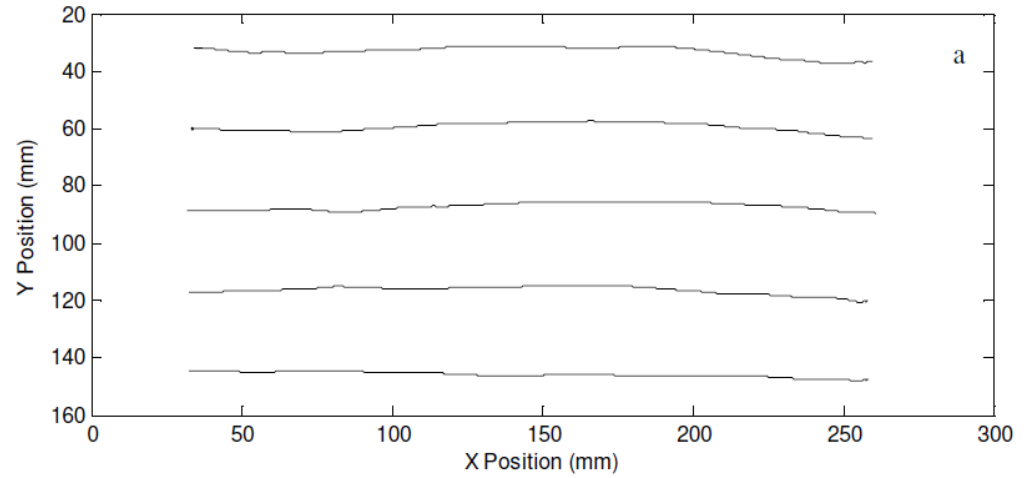
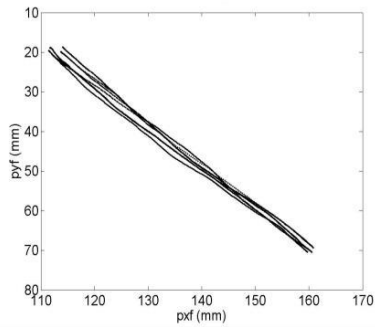
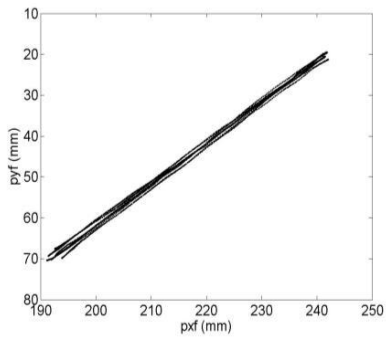
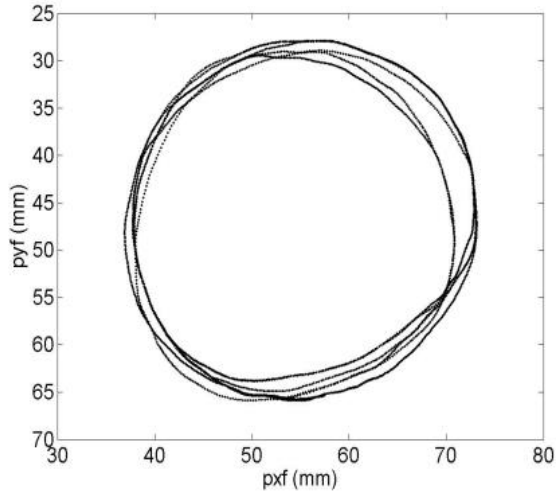
-
-
-

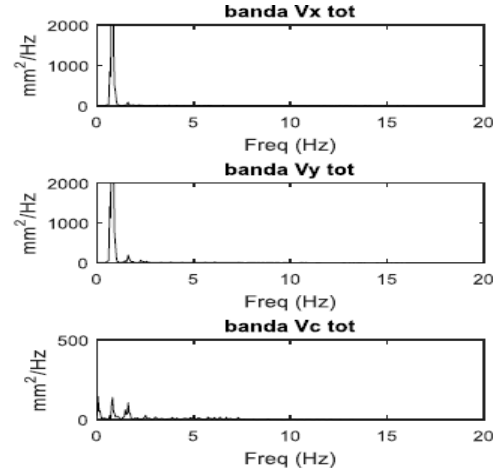
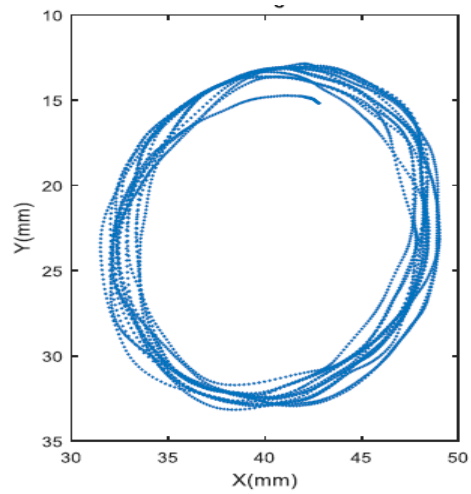
-
-
-

lelele

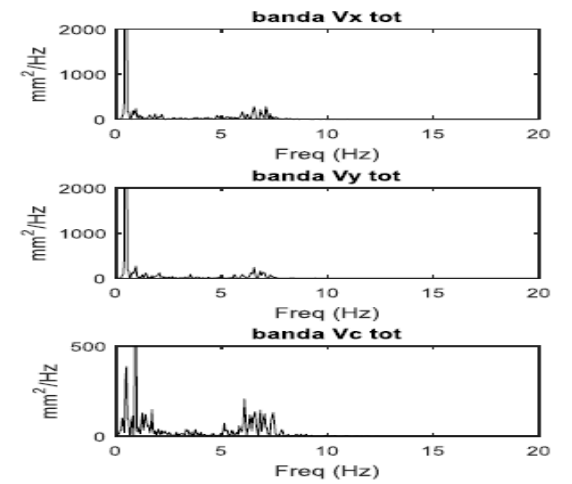
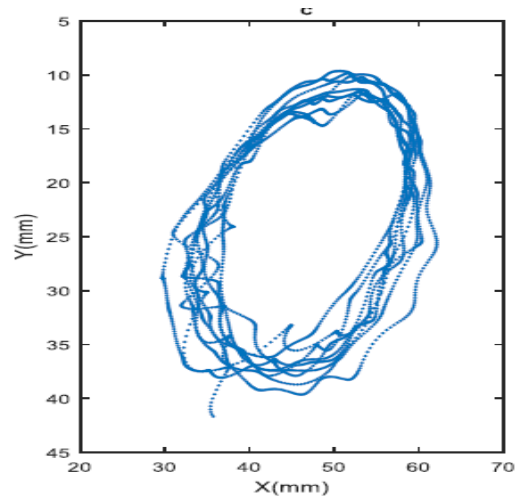
l'elefante vide benissimo quel topo che rubava qualche pezzo di formaggio

20 sec per il cerchio e i
segmenti ripetuti



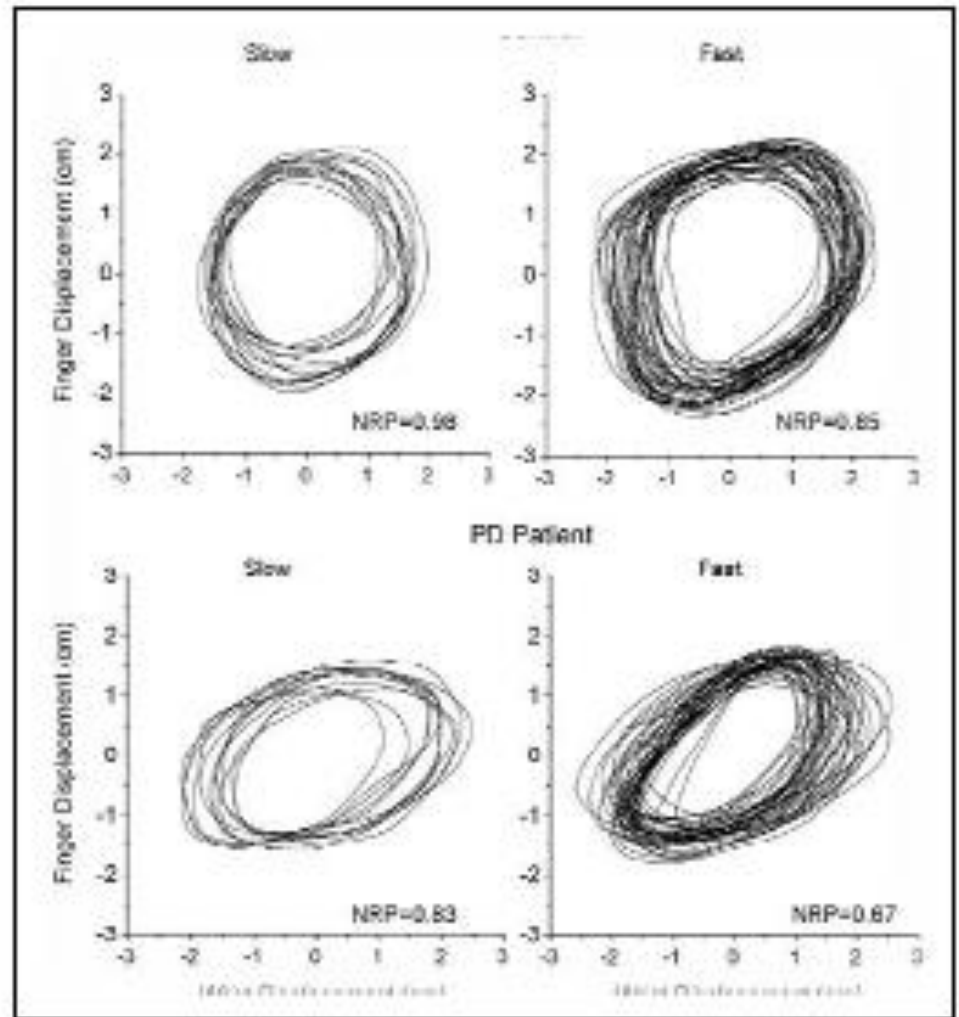


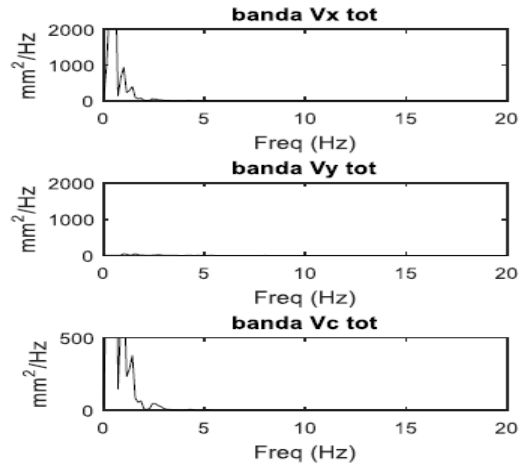
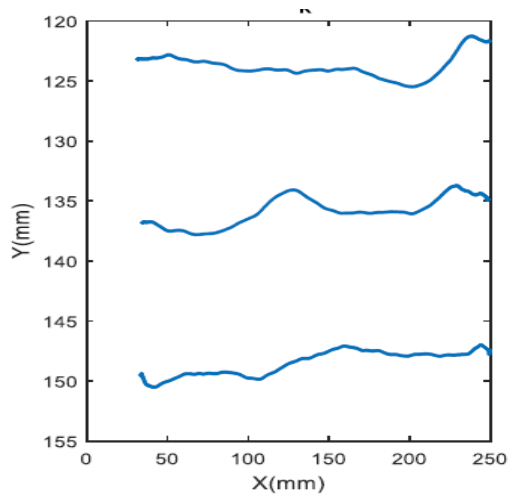
Normale e
Parkinsoniano



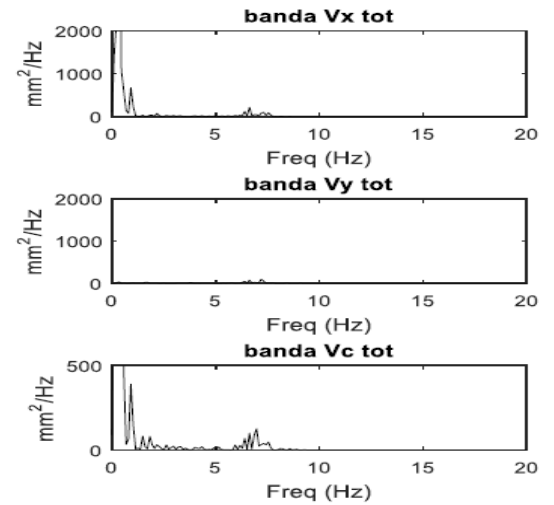
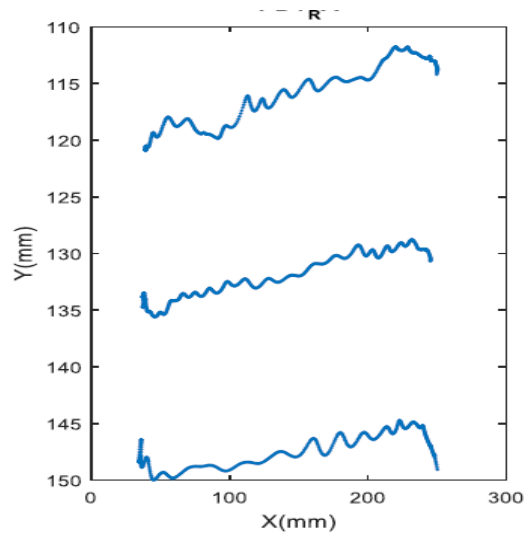
Normale e
Parkinsoniano

a due diverse velocità

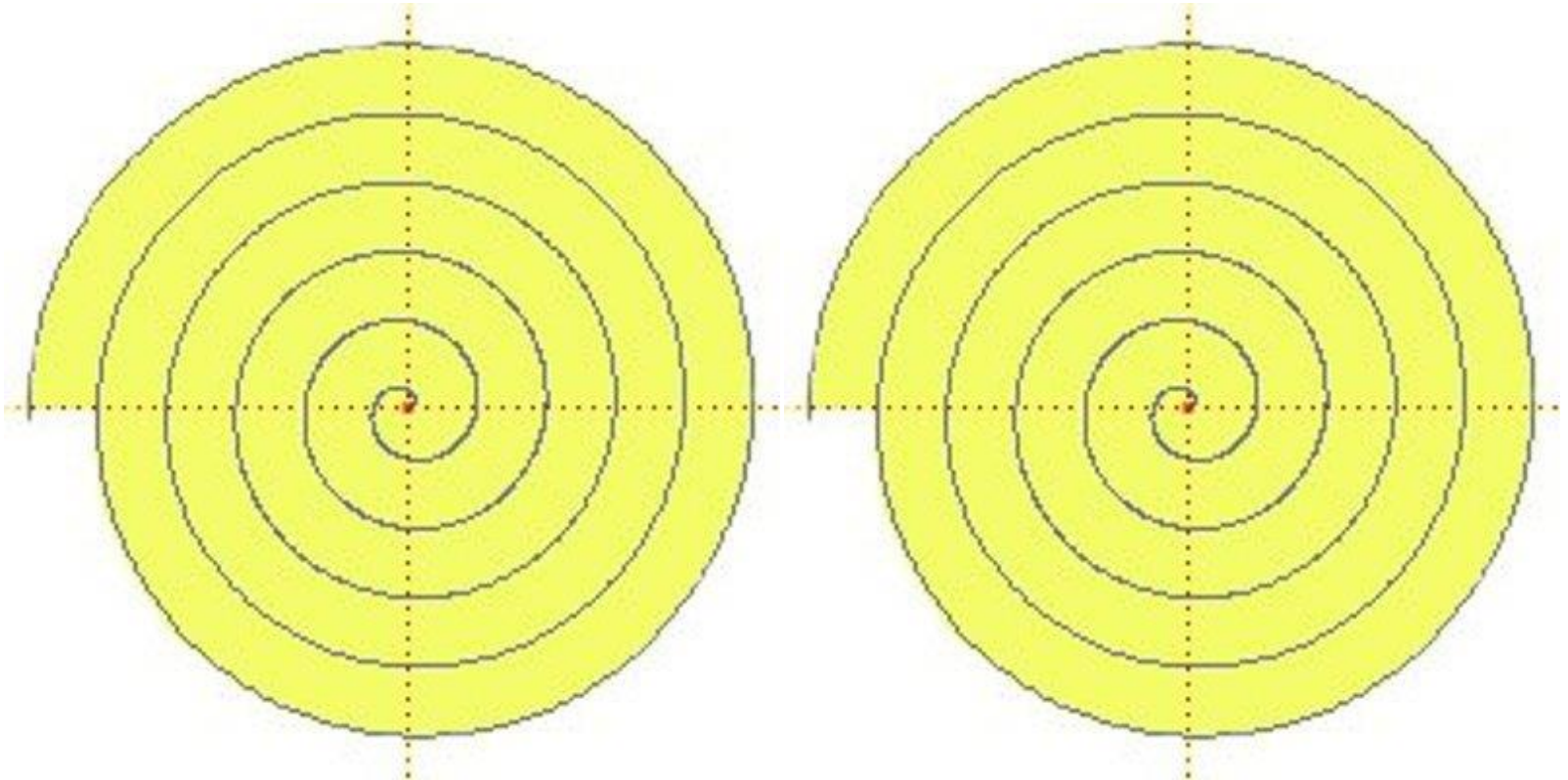


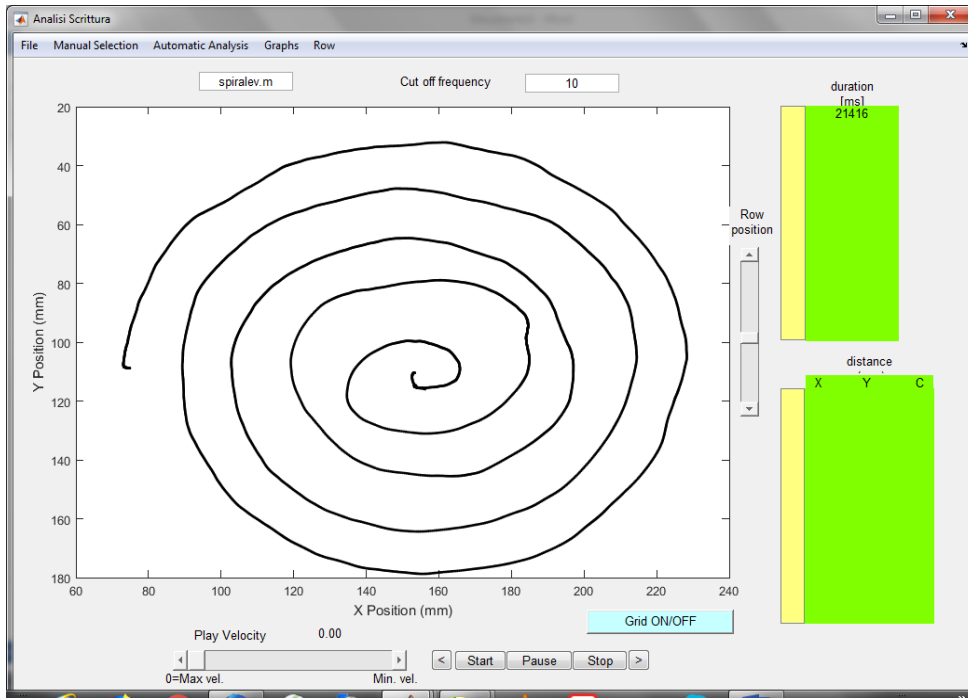


Normale e
Parkinsoniano



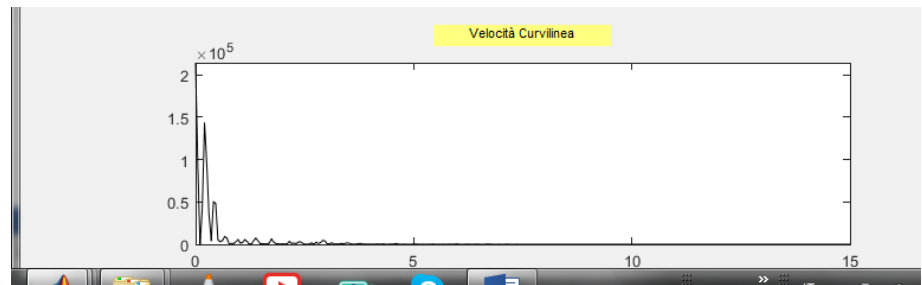
Test Spirale



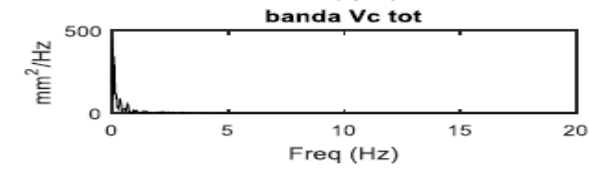
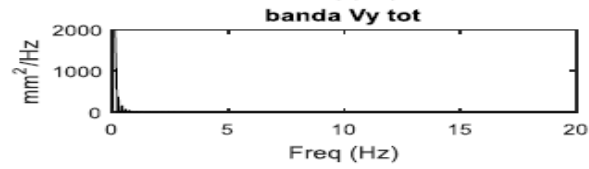
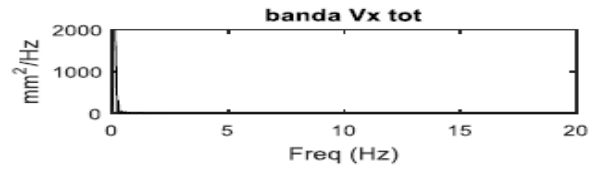
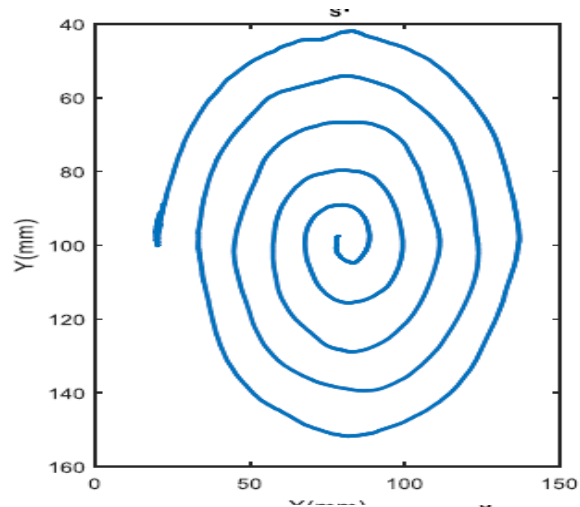


Normale

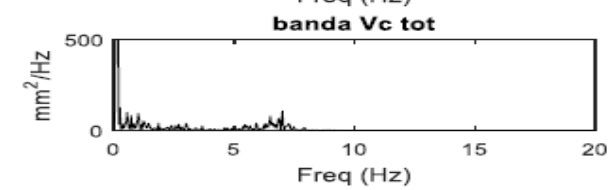
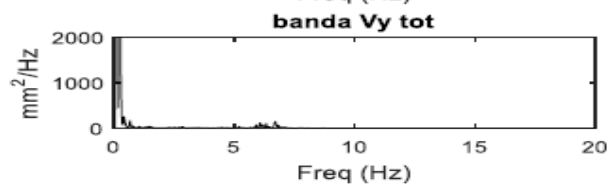
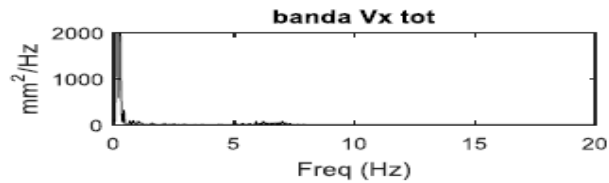
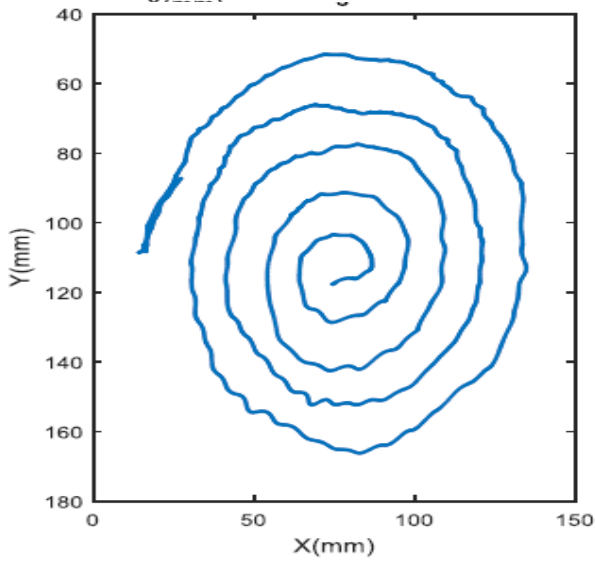
Spettro:

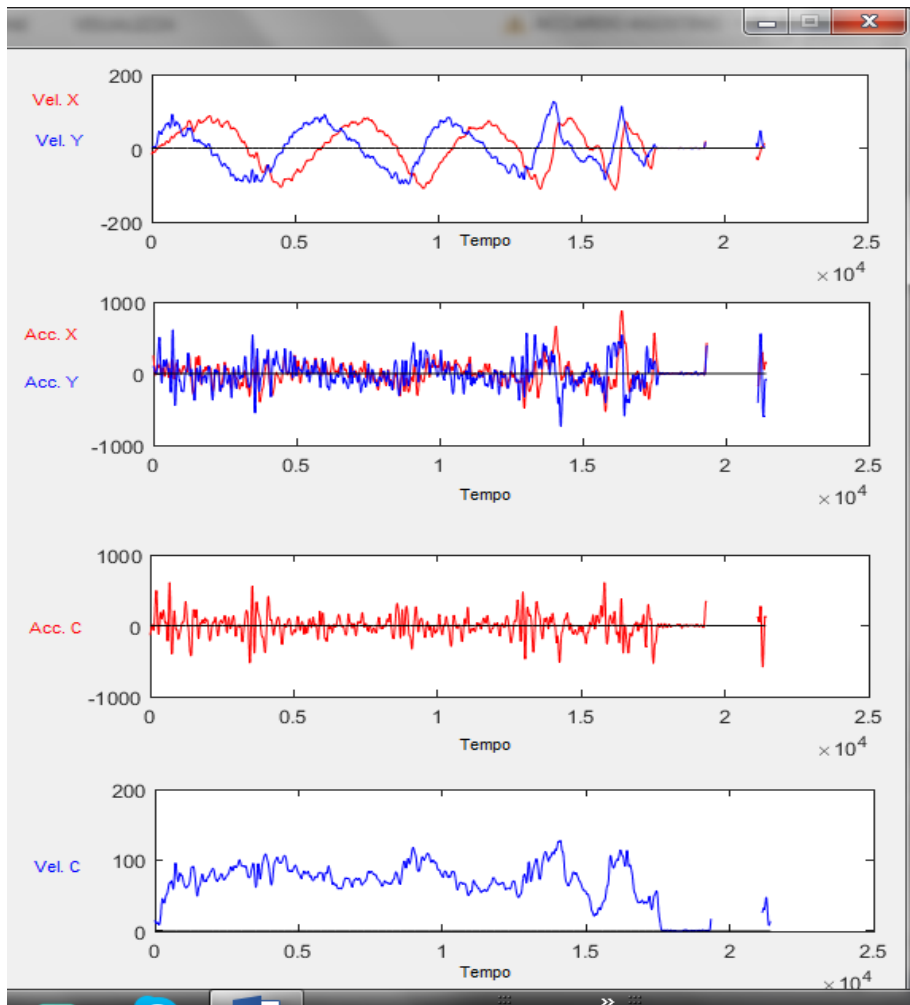


Normale e
Parkinsoniano



Spettri





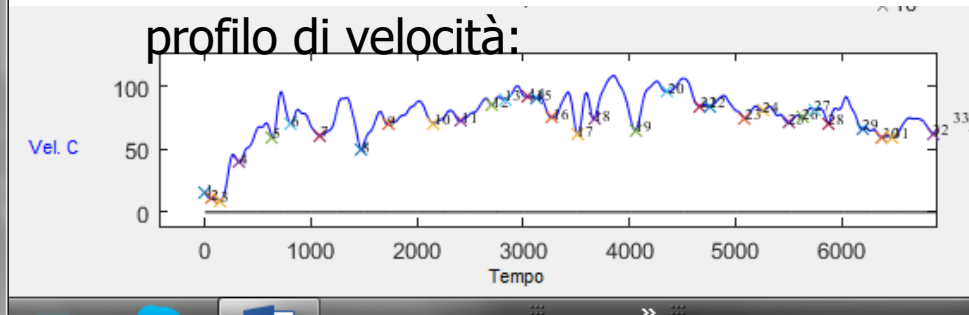
Parkinsoniano

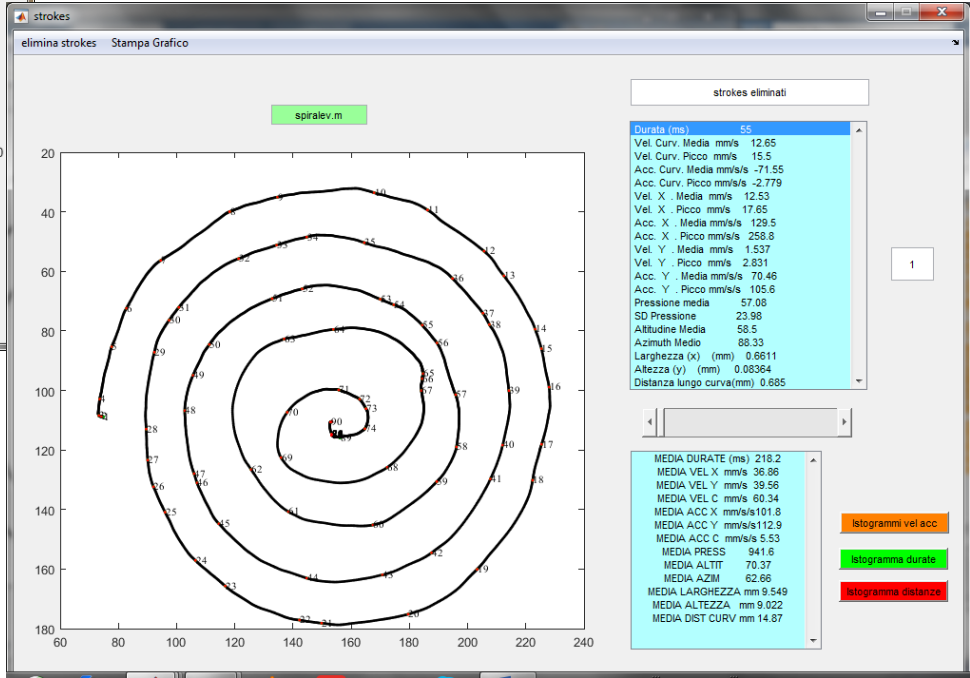
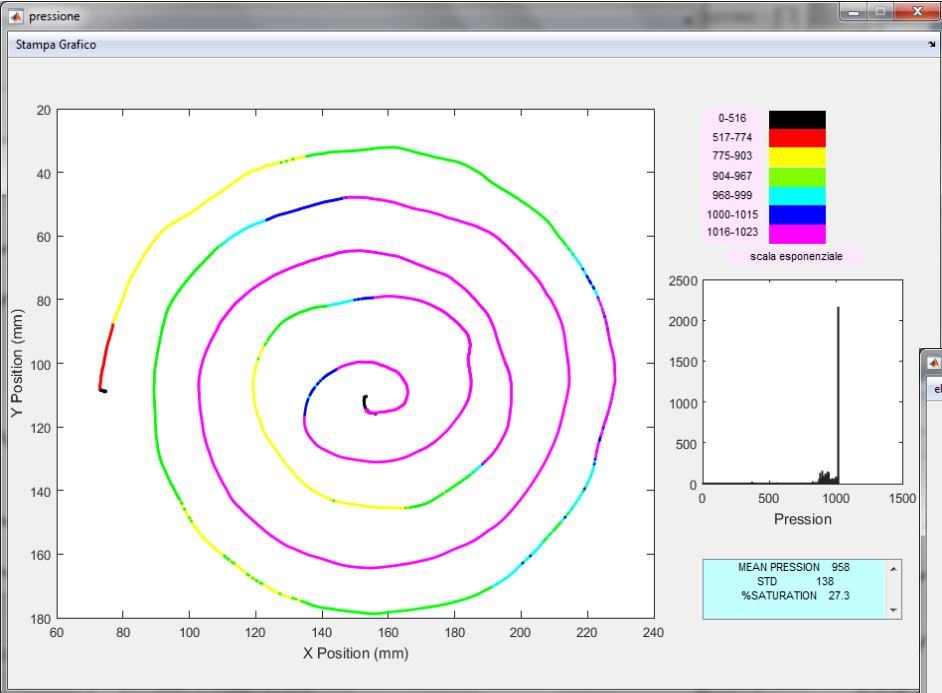
Velocità orizz e vert

Accelerazione orizz e vert

Velocità curvilinea (mm/s)

Identificazione strokes nel
profilo di velocità:

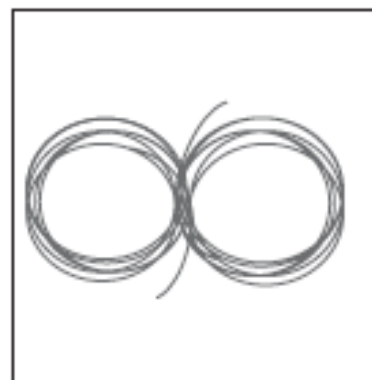




Parkinsoniano

Pressioni e strokes

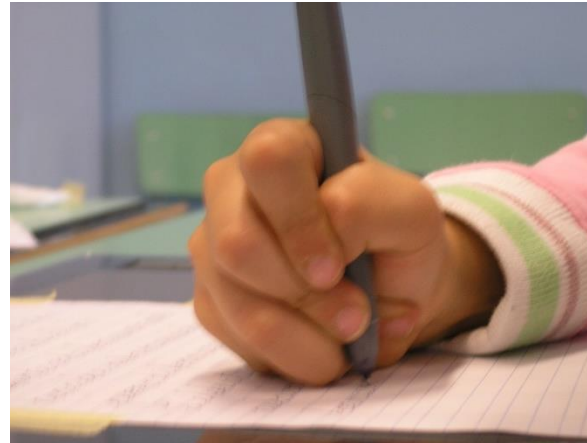
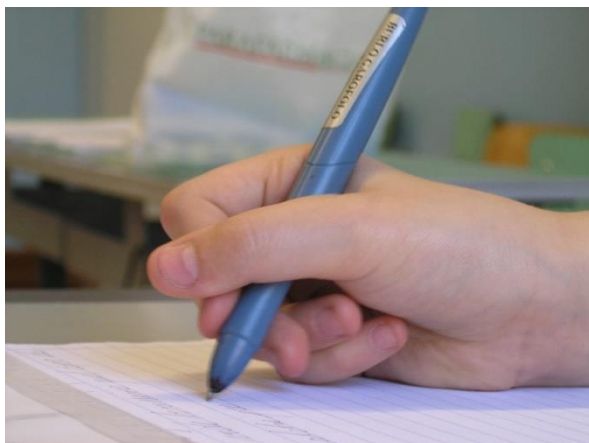
Altri test (prescolari e scolari)



uno uno uno

uno due tre

Prensioni



Relazione tra scrittura e personalità?

Big five??

3 tests: frase accurata e veloce, *lelele*

