

## ***COMPLEMENTI DI ANALISI DEI SEGNALI - Il parte -- 2017/18 e segg.***

1. Programmazione, MATLAB
2. Metodi e parametri per l'analisi lineare
3. Metodi e parametri per l'analisi non lineare
4. Cenni di BCI (seminario Aleksandar Miladinovic)
5. Analisi della scrittura
6. Temi esercizi da svolgere

Esame: Relazione scritta e relativa presentazione +  
orale

## Testi di riferimento

1. R. M. Rangayyan, "Biomedical Signal Analysis. A case-study approach", Wiley-Interscience, 2002
2. W.J. Tompkins, "Biomedical Digital Signal Processing", Prentice Hall, 1993
3. H. Kantz, T. Schreiber, "Nonlinear time series analysis", Cambridge University Press, 2nd Ed 2004

1. Concetto di algoritmo e traduzione in pseudo-codice
2. Linguaggi di programmazione
3. Strutture di programma e strutture dati
4. PROGRAMMA= Istruzioni+Dati
5. Comandi MATLAB
6. Toolbox MATLAB

# CLASSIFICAZIONE DEI SEGNALI

## SEGNALI

deterministici

stocastici

PERIODICI

NON  
PERIODICI

STAZIONARI

NON  
STAZIONARI

Sinusoidale

Complesso

Quasi  
Periodico

Transiente

**Ergodico**

Non  
Ergodico

Segnali  
speciali

SEGNALI QUALI L'EEG POSSONO ESSERE CONSIDERATI  
PROCESSI STOCASTICI STAZIONARI ERGODICI ALMENO IN  
UN INTERVALLO DI TEMPO

# METODI E PARAMETRI PER L'ANALISI LINEARE

P.ES. PER SEGNALI ECG, EEG, VOCE, ....

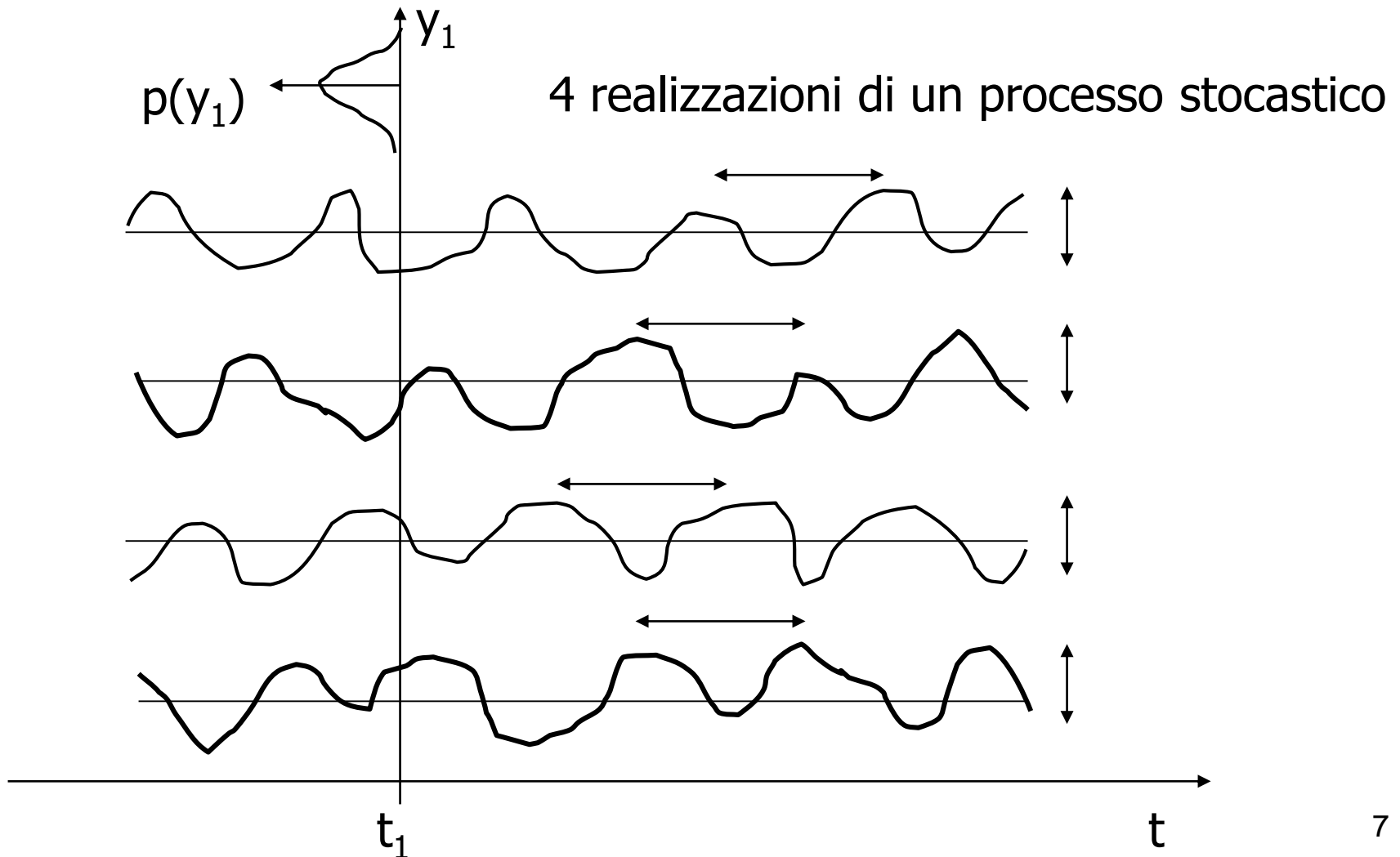
- Processi stocastici e parametri quantitativi
- Correlazione, covarianza, stazionarietà, media, varianza
- Analisi in frequenza, bande e spettro di Fourier, densità spettrale di potenza, metodi del periodogramma, di Welch, ecc.
- Averaging sincronizzato

# Processi **stocastici**

- Molte volte si considera  $y(t)$  come segnale **deterministico**
- In altri casi conviene considerare il valore di  $y$  in un generico istante  $t_1$ ,  $y_1=y(t_1)$ , come una variabile casuale con una distribuzione di probabilità  $p(y_1)$
- Il segnale  $y(t)$  è così visto come una delle tante possibili realizzazioni di un **processo stocastico**
- Questa impostazione è volta allo studio delle **caratteristiche statistiche** importanti del segnale trascurando gli aspetti casuali

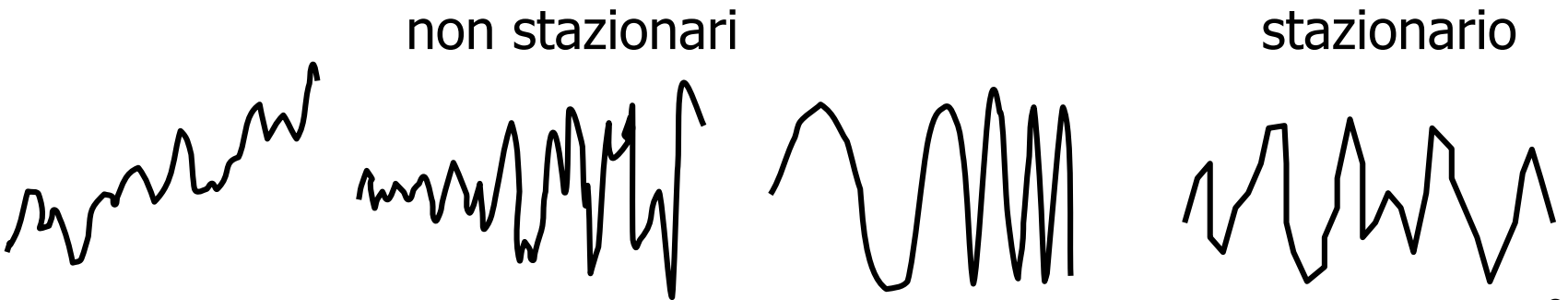
# Processi stocastici

... è casuale che  $y(t)$  cada su un picco positivo di un segnale EEG; non è casuale che  $y(t)$  oscilli intorno allo 0, o che le oscillazioni abbiano una certa ampiezza, o che un picco positivo segue uno negativo mediamente dopo un determinato tempo



# Processi stocastici **stazionari**

- la **stazionarietà** (invarianza nel tempo) richiede che le proprietà statistiche non dipendano da un riferimento temporale assoluto. In termini statistici  $p(y(t))$  deve valere per ogni  $t$  e  $p(y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_k))$  deve dipendere solo dalle distanze temporali  $(t_2-t_1, \dots, t_k-t_{k-1})$ .
- la **stazionarietà debole** si limita a considerare i momenti di primo e secondo ordine:
  - $E(y(t)) = m$  ; valor medio **costante** del processo
  - $\text{Var}(y(t)) = \sigma^2$  ; varianza **costante**
  - $E(y(t) \cdot y(t+\tau)) = r(\tau) + m^2$  ; correlazione dipendente solo dal ritardo  $\tau$



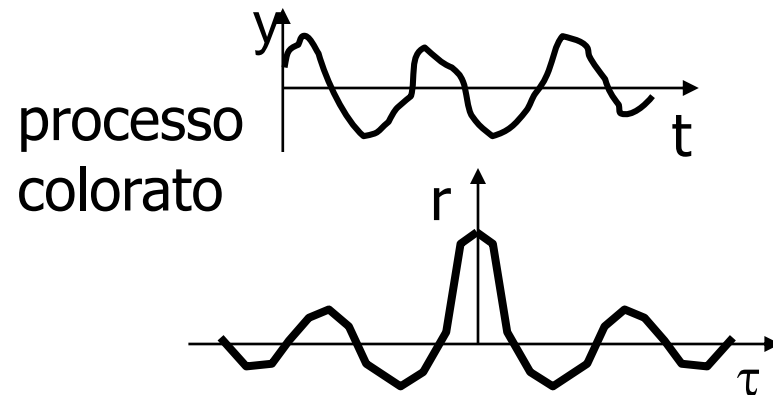
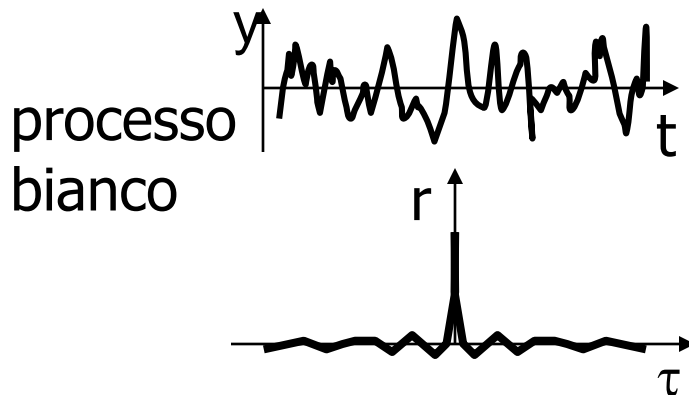


# Parametri di processi stocastici

- il **valor medio** è il valore atteso (baricentro),  $E(y_1)$ , della distribuzione di probabilità  $p(y_1)$  (con  $y_1=y(t_1)$ )
- come per ogni variabile casuale, la **varianza**,  $\sigma^2$ , esprime la dispersione intorno al valore atteso
- la **deviazione standard**,  $\sigma$ , esprime la dispersione intorno al valore atteso nella stessa unità dell'ampiezza di  $y$  e viene anche indicata come **ampiezza efficace** del segnale
- l'**indice di variazione %**,  $\sigma/E(y_1)$  %, esprime in % il rapporto fra ampiezza efficace e polarizzazione (=media) del segnale

# Processi stazionari - funzione di autocorrelazione

- la **funzione di autocorrelazione**,  $r(\tau) + m^2$ , di un processo stazionario (almeno in senso debole) esprime la correlazione fra due istanti del processo in dipendenza del ritardo  $\tau$  che li separa
- "auto" in quanto correlazione del processo con se stesso
- spesso è utilizzata la sigla **ACF** (autocorrelation function)
- spesso il calcolo è preceduto dalla sottrazione del valor medio  $m$  e quindi si indica con ACF la funzione  $r(\tau)$  prendendo "autocorrelazione" come sinonimo di "autocovarianza"
- $r(0) = \sigma^2$  (varianza);  $r(-\tau) = r(\tau)$  (funzione pari)

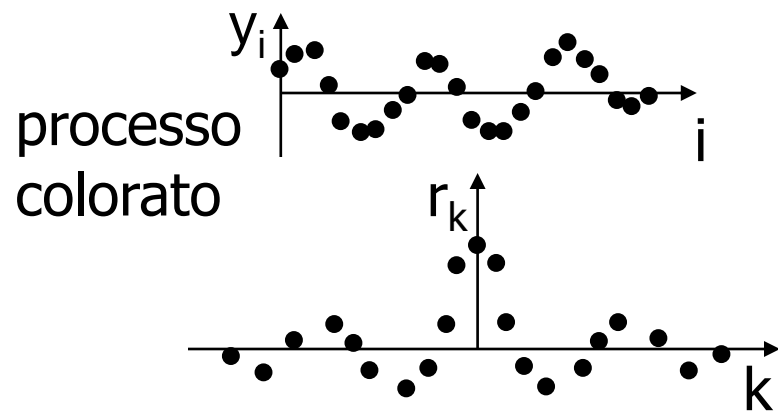
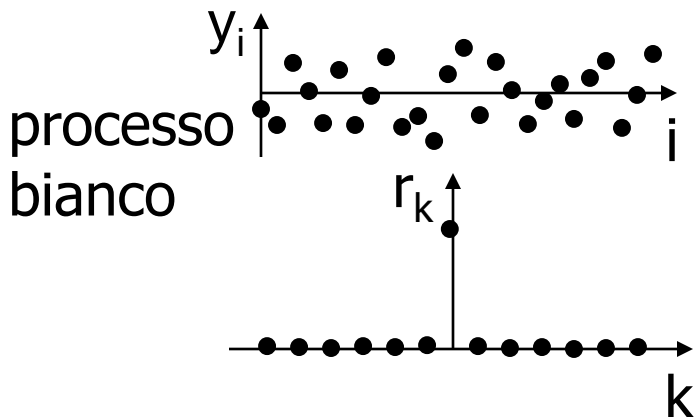


# Processi stazionari ergodici - tempo discreto

- un processo stocastico si dice ergodico quando le medie statistiche convergono quasi ovunque alle medie temporali
- il calcolo delle medie temporali viene scritto:

$$m = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} y_i \quad ; \quad y_i = y(i \cdot T_C) \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$r_k + m^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} y_i \cdot y_{i+k} \quad ; \quad k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$



# Analisi spettrale

- Il contenuto in frequenza di un segnale deterministico oppure stocastico stazionario è messo in evidenza da tracciati ottenuti mediante la trasf. di Fourier che prendono il nome di **spettri** (in analogia col contenuto della luce alle varie lunghezze d'onda)
- a seconda della caratteristica descritta si parla di:
- **spettro di ampiezza**, descrive l'ampiezza delle componenti armoniche (l'uso degli sp. di energia o di potenza è più comune)
- **spettro di fase**, nei segnali deterministici descrive la fase delle componenti armoniche rispetto ad un riferimento temporale fisso; nei segnali stocastici questo non ha senso (almeno in ambito lineare) ma spesso occorre dare lo sfasamento fra la stessa componente armonica di due segnali diversi
- **spettro di energia** descrive l'ampiezza quadratica delle componenti armoniche nei segnali deterministici
- **spettro di potenza**, descrive l'ampiezza quadratica media delle componenti armoniche nei segnali stocastici

## Spettro di potenza - processi stocastici stazionari

- sia  $y(i)$  un processo a t. discreto, stocastico, stazionario (almeno in senso debole), ergodico (medie statistiche convergono alle medie temporali) ed a media nulla, la varianza è:

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(i)^2$$

- è immediato riconoscere a questa un significato di **potenza** (media di valori quadratici); meno immediato è definire uno spettro di potenza; infatti, non esiste una Serie di Fourier perché non esistono periodicità deterministiche; non esiste una DTFT poiché il segnale è illimitato e ad energia infinita
- è però intuitivo che oscillazioni che si ripetono in modo statisticamente significativo possano essere stimate, grazie alla ergodicità, anche su un finestra limitata di N campioni
- lo spettro di potenza teorico del processo viene quindi definito come limite per  $N \rightarrow \infty$  della stima su N campioni

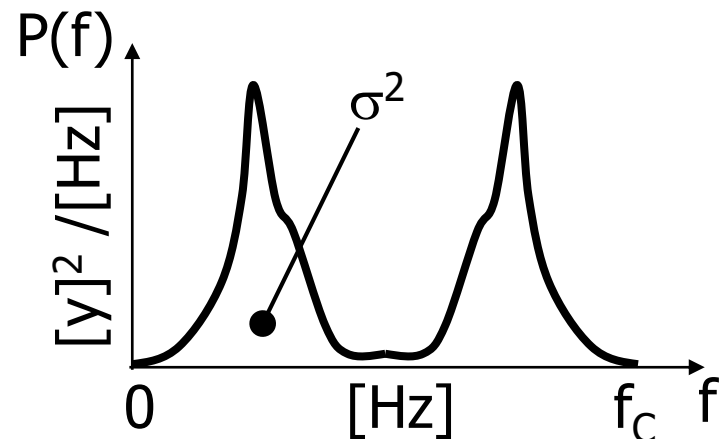
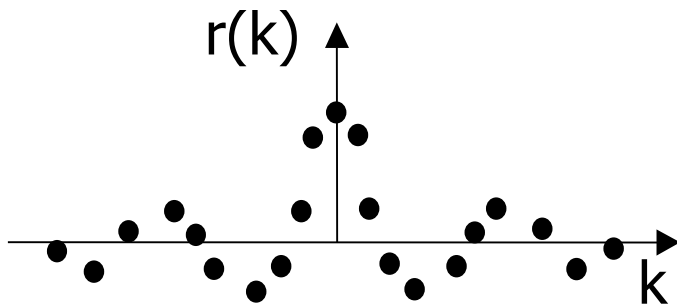
## Spettro di potenza - **trasf. di Fourier della ACF**

- il **Th. di Wiener-Khinchin** definisce lo spettro di potenza di un processo stocastico stazionario come la **trasf. di Fourier della ACF**; in tempo discreto:

$$S(\Omega) = \mathcal{F}(r(k))$$

- l'antitrasformata di  $S(\Omega)$ , per  $k=0$ , coincide con l'integrale dello spettro  $S(\Omega)$  e restituisce  $r(0)=\sigma^2=\text{Pot.}$  in accordo con Parseval

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\Omega) d\Omega$$



# Spettro di potenza

- lo spettro di potenza viene anche detto densità spettrale di potenza (PSD, Power Spectral Density)
- le stime del PSD ottenute mediante trasf. di Fourier (mediante la FFT) sono dette **non-parametriche** e, come vedremo qui di seguito, si basano sul calcolo diretto del periodogramma
- metodi **parametrici** non analizzano direttamente il contenuto in freq. ma stimano i parametri di opportuni modelli da cui si ricava la PSD
- alcune applicazioni:
  - ritmi nell'EEG:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$ ,  $\delta$
  - ritmi nella variabilità della freq. cardiaca: LF (0.1 Hz - controllo cardiovascolare), HF (0.3 Hz - attività respiratoria)
  - freq. media dell'EMG (tipo di unità motorie e freq. di scarica)
  - freq. formanti nel parlato (suoni vocalici e consonantici)
  - suoni valvole cardiache (stenosi od insufficienza valvolare)

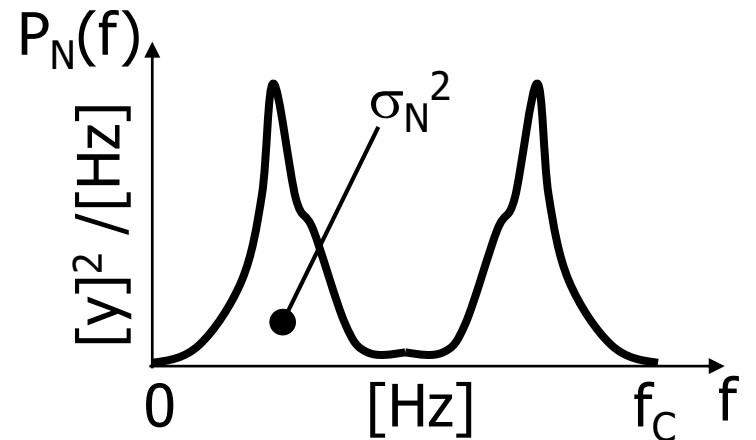
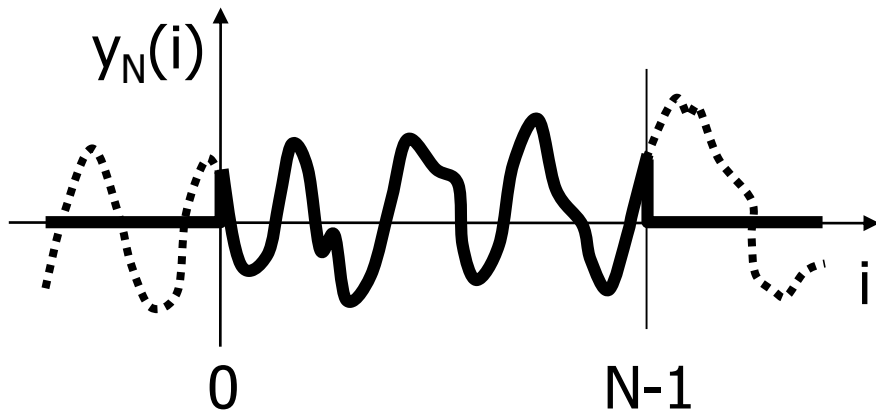
# Periodogramma

- sia  $y_N(i)$  il segnale **finestrato** su N campioni ( $y_N(i)=y(i)$ , per  $i=0, \dots, N-1$ ,  $y_N(i)=0$  altrove) sia  $Y_N(\Omega)$  la sua DTFT, definiamo il **periodogramma** stimato su N campioni,  $S_N(\Omega)$

$$S_N(\Omega) = \frac{|Y_N(\Omega)|^2}{N} = \frac{Y_N(\Omega) Y_N^*(\Omega)}{N} ; \quad S(\Omega) = E \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\Omega) \right]$$

- si noti che la relazione di Parseval vale per qualsiasi N:

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(i)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_N(\Omega) d\Omega = \int_0^{f_C} P_N(f) df ; \quad (P_N(f) = T_C S_N)$$



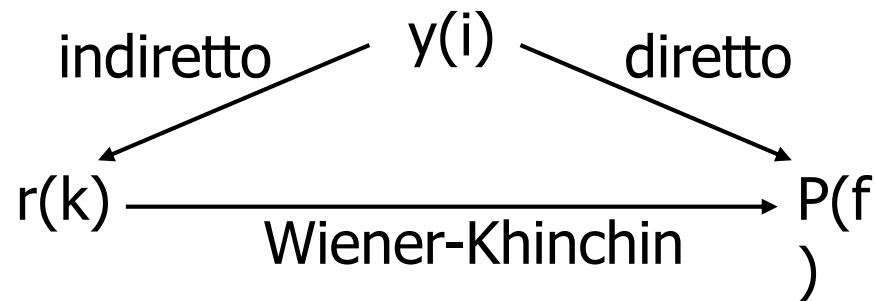


## Metodo diretto - metodo indiretto

- si può dimostrare che il **periodogramma** di Schuster, su N campioni, coincide con la **DTFT della stima polarizzata** della ACF

$$S_N(\Omega) = \mathcal{F}(r_N(k)) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-k-1} y(i) y(i+k)\right)$$

- per la stima dello spettro il calcolo del periodogramma dal segnale costituisce un metodo **diretto** in contrapposizione con il metodo **indiretto** (o di Blackman Tukey) che passa attraverso la stima della ACF



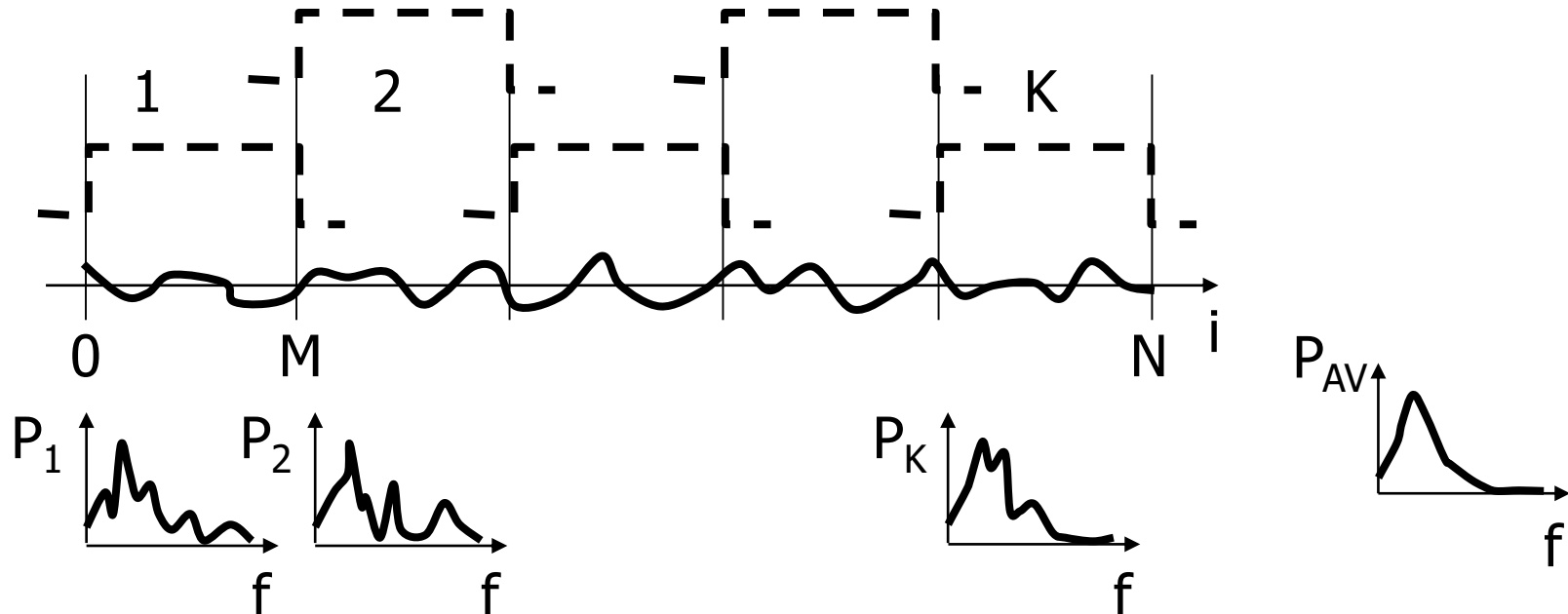
- si noti che la stima della ACF,  $r_N(k)$ , è polarizzata perchè N-k prodotti sono divisi per N con un effetto di **finestratura triangolare** (di Bartlett)  $(N-|k|)/N$  sulla ACF

# Stima non parametrica dello spettro di potenza

- il periodogramma permette di applicare l'algoritmo molto efficiente della FFT per ottenere N campioni di  $P_N(f)$
- però il periodogramma non è una stima consistente:  $E[P_N(f)] \rightarrow P(f)$  per  $N \rightarrow \infty$ , ma l'errore della stima non  $\rightarrow 0$
- in altre parole il periodogramma non sfrutta correttamente l'ergodicità del processo: aumentando N si migliora la risoluzione in freq. ottenendo più campioni fra 0 e la  $f_c$  ma l'errore dei punti infittiti non migliora e mantiene una varianza dell'ordine di  $\sigma^4$
- questo limite viene corretto **diminuendo la risoluzione spettrale** a vantaggio di una **diminuzione dell'errore di stima** ottenendo così degli spettri più **smussati** (smooth)
- vi sono due approcci spesso usati in combinazione:
  - 1) finestrare il segnale raccordando meglio gli estremi a zero
  - 2) dividere gli N campioni in K finestre di M campioni ( $N = K M$ ) e fare la media dei K spettri ottenuti

# Metodo di Bartlett

- consiste nel dividere il segnale di  $N$  campioni in  $K$  finestre di  $M$  campioni  $N=K M$ , calcolare i rispettivi spettri ed infine fare la media dei  $K$  spettri
- la risoluzione in freq. (proporzionale a  $1/MT_c$ ) peggiora di un fattore  $K$ ; la varianza della stima migliora di un fattore  $K$  (SNR spettro migliora di  $\sqrt{K}$ ) perché, per ergodicità, le stime spettrali delle singole finestre possono essere considerate indipendenti



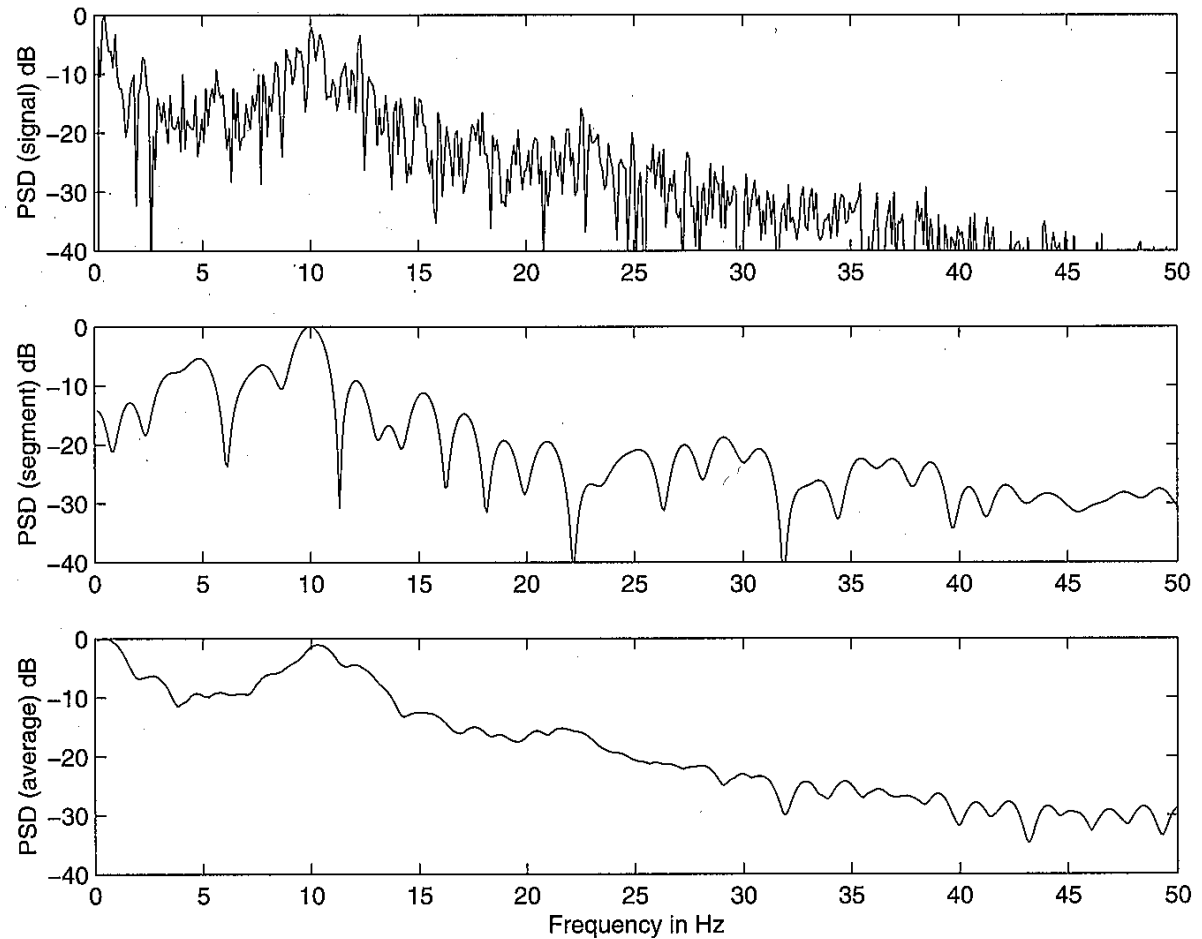
## Metodo di Bartlett: finestrazione implicita

- per calcolare in modo più preciso la risoluzione spettrale bisogna tenere conto della **finestrazione implicita del segnale** mediante **finestra rettangolare** con base M campioni,  $w_R(i)$
- a questa corrisponde una **finestrazione della ACF** di tipo **triangolare** (Bartlett, vedi stima polarizzata) con una base  $2M-1$  (relativa ai campioni di ACF stimati da  $r_N(-M)$  ad  $r_N(+M)$ ),  $w_B(k)$
- la  $w_B(k)$  è pari a  $w_R(i) * w_R(-i)$  e la sua trasformata  $W_B(f) = |W_R(f)|^2$
- questa relazione di convoluzione nel tempo e di modulo al quadrato nelle frequenze è generale fra la finestra applicata al segnale e quella risultante sulla stima della ACF
- **la finestrazione implicita (ed in generale qualsiasi finestrazione) fa sì che il valore atteso della stima sia pari al vero spettro  $P(f)$  convoluto per la trasformata della finestrazione della ACF:**  
 $E(P_N(f)) = W_B(f) * P(f)$
- in questa operazione: il **lobo principale riduce la risoluzione;** i **lobi laterali causano dei picchi spettrali spuri**

# Esempio applicazione del metodo di Bartlett

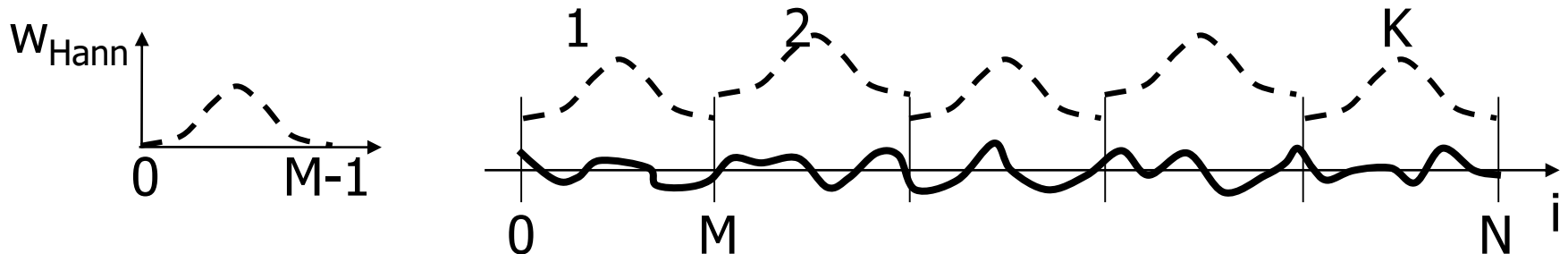
calcolo del periodogramma di un EEG; dall'alto:

- 1) periodogramma su  $N=750$  campioni;
- 2) periodogramma su  $M=64$  campioni ( $K=11$ );
- 3) media di 11 periodogrammi; FFT su 1024 campioni (zero padding di  $1024-750$  campioni nel primo caso e di  $1024-64$  campioni negli altri)

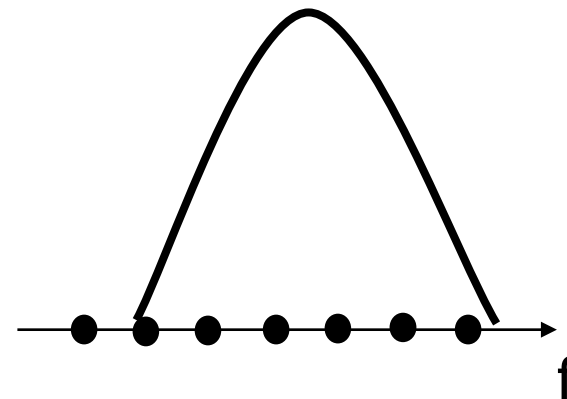
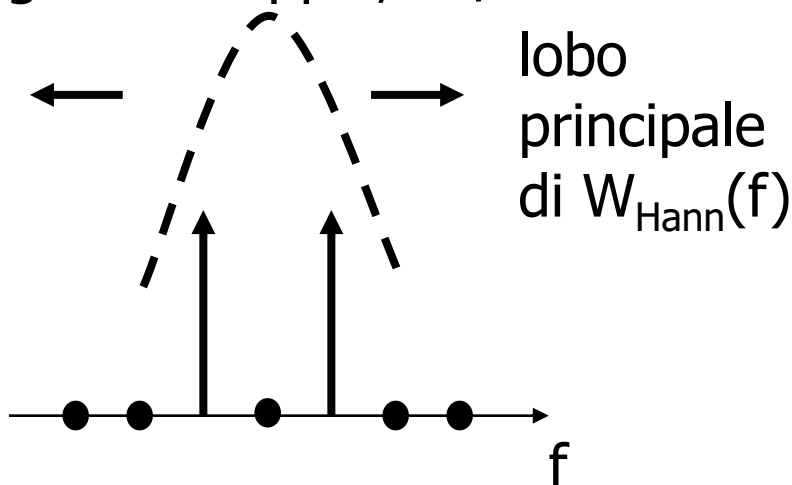


# Metodo di Welch: risoluzione in frequenza

- il metodo di Welch modifica il metodo di Bartlett introducendo una **finestratura esplicita che raccordi i bordi delle finestre a zero**

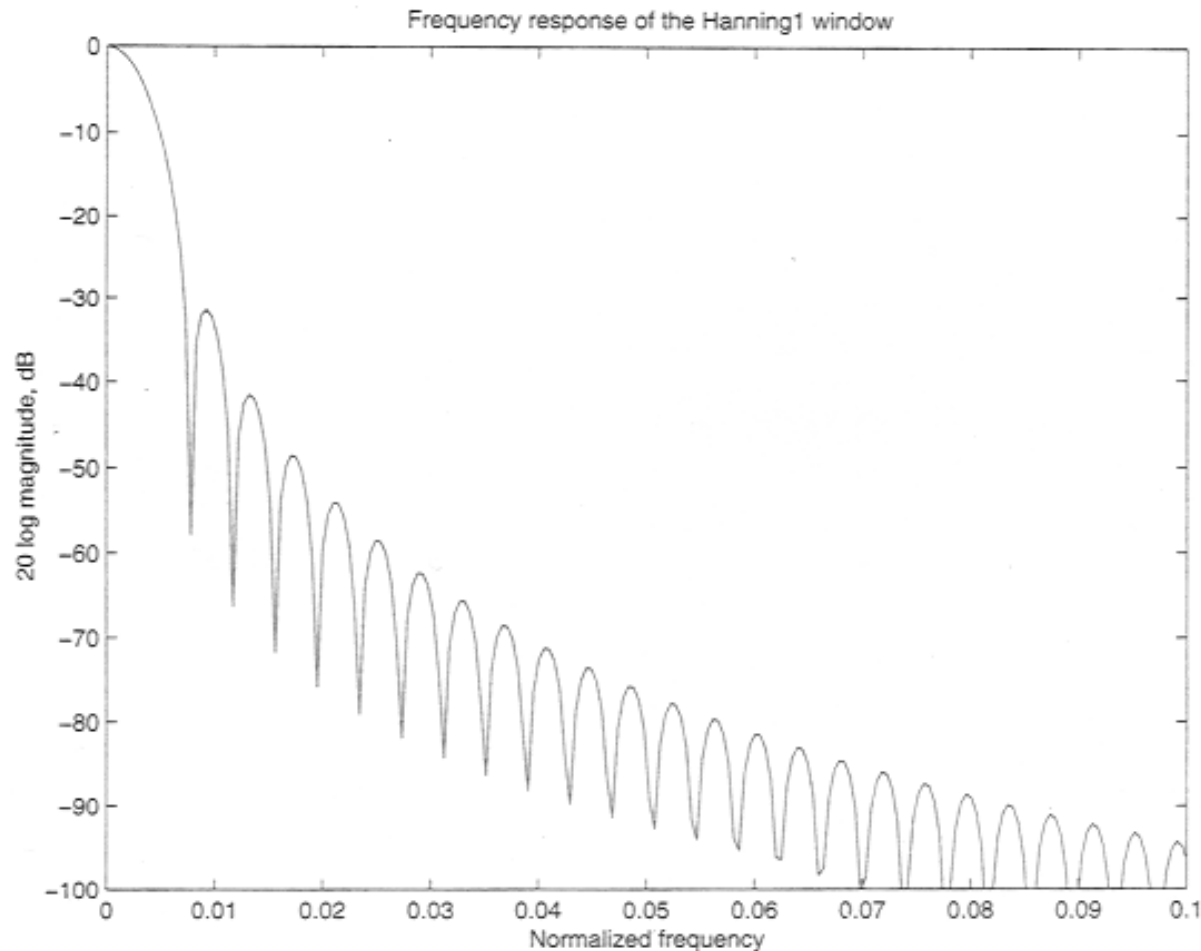


- e.g. una finestra di tipo coseno di Hann (in gergo di "Hanning" per assonanza con Hamming) ha il lobo laterale di -31 db
- vi è però una peggiore risoluzione a causa del lobo principale di larghezza doppia,  $8\pi/M$



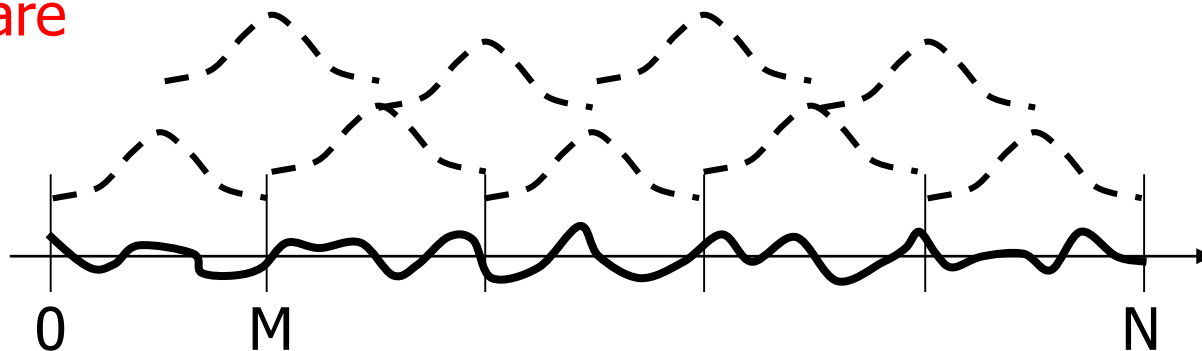
# Metodo di Welch con finestra coseno di von Hann

- la finestra  $w_{\text{Hann}}(i) = (1/2)(1 - \cos(2\pi i/(M-1)))$  ha lobo principale largo  $8\pi/M$  ed il primo lobo laterale a  $-31$  db



## Metodo di Welch: dettagli sull'applicazione

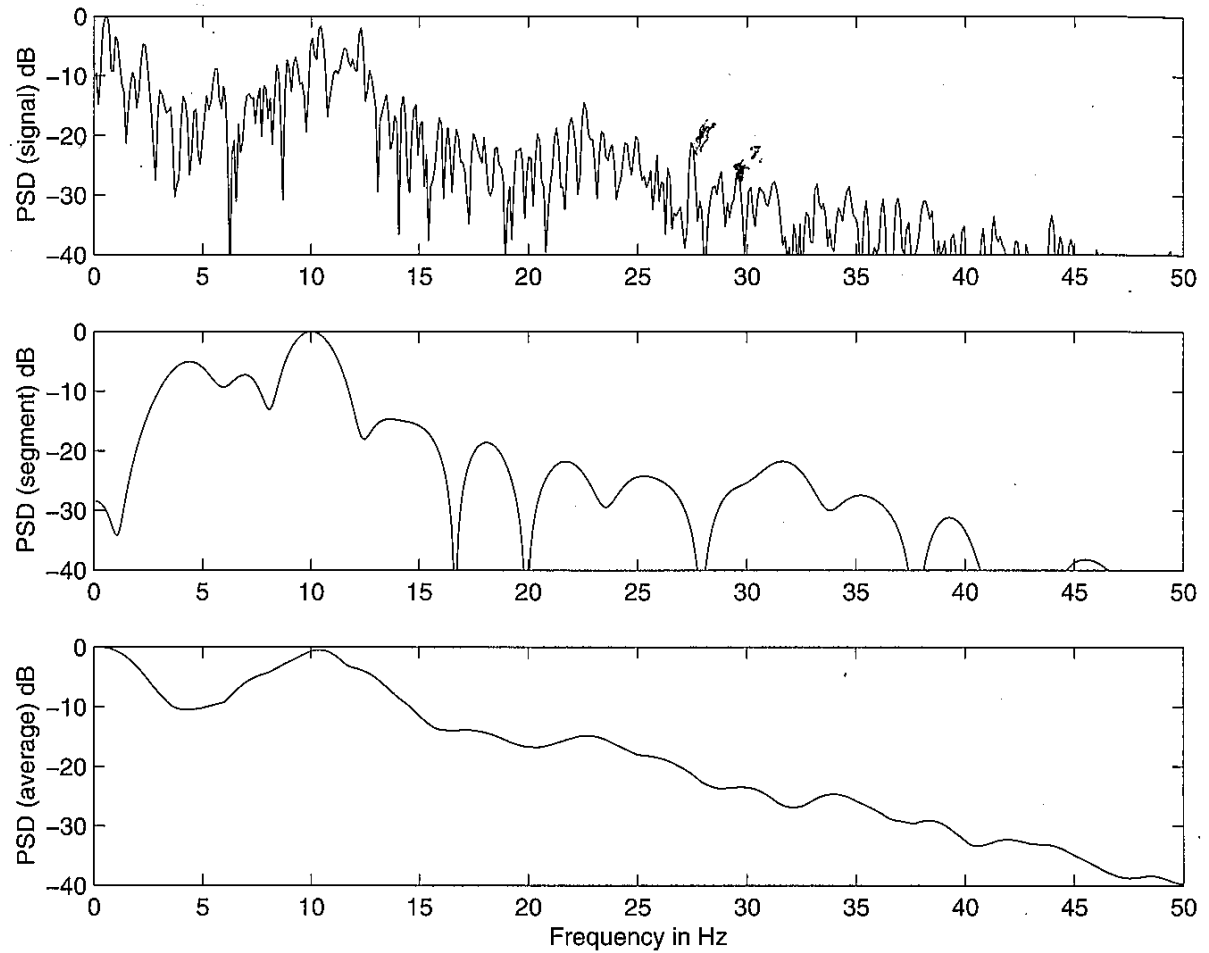
- vi sono anche **finestre** particolarmente adatte all'analisi spettrale: **Chebyshev, Gauss, Nuttall, etc.**
- per non avere modificazioni dei valori di potenza le finestre vanno scalate in modo da avere media quadratica unitaria
- per poter tracciare lo spettro con una buona risoluzione grafica occorrono in genere più degli  $M$  punti di FFT; si può interpolare i campioni in frequenza mediante zero padding nel tempo (questo non aumenta la vera risoluzione in frequenza)
- **campioni ai bordi delle finestre raccordate a zero sono pesati poco e quindi si può adottare una sovrapposizione (overlap) fra finestre adiacenti (in genere del 50%) avendo così  $2K-1$  spettri da mediare**





# Esempio di applicazione del metodo di Welch

calcolo del  
periodogramma di un  
EEG; dall'alto:  
1) periodogramma su  
 $N=750$  campioni;  
2) periodogramma su  
 $M=64$  campioni  
( $K=11$ ) e finestra di  
Hann;  
3) media di 11  
periodogrammi;  
(FFT su 1024  
campioni)



# Caratteristiche di alcuni segnali biomedici

<b>SEGNALE</b>	<b>AMPIEZZA</b>	<b>FREQUENZA</b>
ECG	0.1 ÷ 4 mV	0.01 ÷ 250 Hz
EEG	5 ÷ 300 $\mu$ V	0.05 ÷ 150 Hz
Potenziali Evocati		
Visivi	alcuni $\mu$ V	5 ÷ 50 Hz
Acustici	sotto il $\mu$ V	20 ÷ 2000 Hz
Somatosensoriali	alcuni $\mu$ V	1 ÷ 2000 Hz
EMG	0.1 ÷ 5 mV	0.01 ÷ 10000 Hz
Respiro	2-50 resp/min	0.1 ÷ 10 Hz

## **EEG:**

Banda passante	Applicazione	Frequenza di campionamento
0.05 ÷ 200 Hz	Diagnostica	500 Hz
0.05 ÷ 100 Hz	EEG dinamico	250 Hz
0.05 ÷ 50 Hz	Monitoraggio	100 ÷ 200 Hz

# EEG - Esempi di tracciati

- ritmo  $\alpha$  , 8-13 Hz

Alpha



- ritmo  $\beta$  > 13 Hz

Beta



- ritmo  $\theta$  , 4-8 Hz

Theta



- ritmo  $\delta$  < 4 Hz

Delta

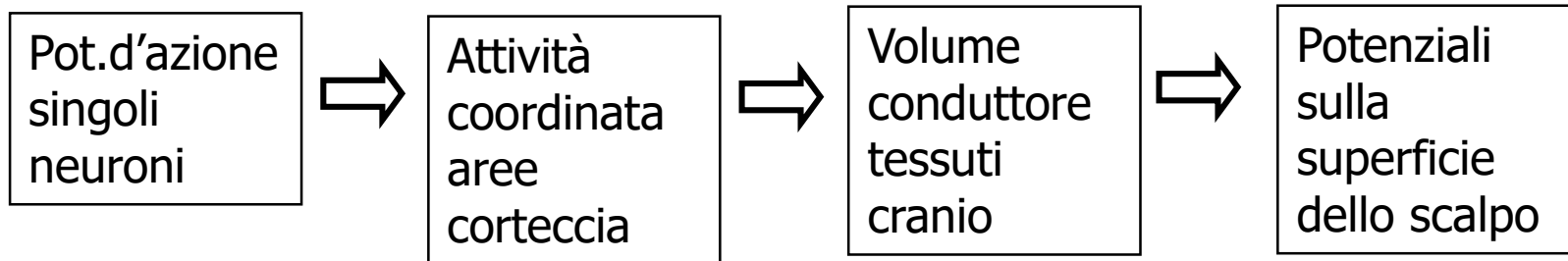


] 50  $\mu$ V

1 s

# EEG – Caratteristiche principali

- **banda** 0.1 Hz - 70 Hz, ampiezza decine di  $\mu\text{V}$
- **stazionario** (con le stesse caratteristiche) per brevi tratti
- **non periodico** ma spesso con un ritmo prevalente concentrato su specifiche **bande di frequenza**
- le caratteristiche variano con la **derivazione**
- vi sono similitudini e sincronismi fra derivazioni vicine



- informazione indiretta e globale sull'attività cerebrale
- ridondanza del tracciato rispetto alle caratteristiche rilevanti
- possibilità di integrare informazioni da diverse derivazioni

## RIASSUNTO:

Segnali stocastici e segnali deterministici, segnali ergodici  
PSD, Spettro di Fourier, Potenza in una banda  
Periodogramma, Welch

Segnali campionati a freq. costante e a freq. variabile,  
interpolazione polinomiale e spline cubiche, soluzione ai  
minimi quadrati

Lomb-Scargle

ESERCIZI (da applicare a segnali EEG, ECG, ecc.):

Scrivere un programma in MATLAB per:

- Calcolare media, varianza, correlazione
- Esaminare come valutare la stazionarietà
- Stimare lo spettro di Fourier, la densità spettrale di Potenza e la Potenza in una banda
- Eseguire l'averaging sincronizzato (vedi slide apposite)

# ECG/HRV – Caratteristiche principali

- **Banda** ECG: 0.015 Hz - 150 Hz, ampiezza pochi mV
- Individuazione complessi QRS e durate intervalli RR
- Analisi della variabilità cardiaca (HRV) legata ai controlli del sistema nervoso autonomo (simpatico/parasimpatico)
- Segnale HRV 'campionato' in modo irregolare
- Necessità di individuare battiti anomali e sostituirli mediante interpolazione, quindi campionare a 2-5Hz
- **Segnale stazionario** sul 'breve' periodo (5 minuti)
- **Non periodico** ma con caratteristiche associabili a vari sistemi di controllo concentrate su specifiche **bande di frequenza** (VLF=0.02-0.040Hz, LF=0.041-0.15Hz, HF=0.151-0.45Hz)
- Analisi nel tempo e potenza spettrale assoluta e relativa nelle 3 bande: media, SD, RMSSD, NN50, pNN50, VLF, LF, HF, LF/HF, LFn, HFn
- Possibilità di applicare Lomb-Scargle

```
%% calcolo PSD per un segnale HR
```

```
LRRe=length(RRe);
```

```
nfft = 2^nextpow2(LRRe);
```

```
[psp,freq] = periodogram(RRe-mean(RRe),hamming(LRRe),nfft,fcRR,'onesided');
```

```
pf = freq(2);% passo in freq
```

```
% Bande: LF=0.041-0.150, HF=0.151-0.45
```

```
% LF 0.041-0.150
```

```
a0=fix(0.041/pf+.5)+1; b0=fix(0.15/pf+.5)+1;
```

```
LF=sum(psp(a0:b0))*pf;
```

```
% HF 0.151-0.45
```

```
a0=fix(0.151/pf+.5)+1; b0=fix(0.45/pf+.5)+1;
```

```
HF=sum(psp(a0:b0))*pf;
```

```
LF_HF = LF/HF;
```

```
LFn = LF/(LF+HF);
```

```
HFn = HF/(LF+HF);
```

Oppure: pwelch

[Pxx,W] = pwelch(X,WINDOW,NOVERLAP,NFFT) specifies the number of FFT points used to calculate the PSD estimate. For real X, Pxx has length (NFFT/2+1) if NFFT is even, and (NFFT+1)/2 if NFFT is odd. If NFFT is specified as empty, NFFT is set to either 256 or the next power of two greater than the length of each section of X, whichever is larger.



# plomb Lomb-Scargle periodogram

[P,F] = plomb(X,T) returns the Lomb-Scargle power spectral density estimate, P, of a signal, X, that has been sampled at the instants specified in T. T must increase monotonically, but need not be uniformly spaced. P is evaluated at the frequencies returned in F


THE ASTROPHYSICAL JOURNAL SUPPLEMENT SERIES, 236:16 (28pp), 2018 May

© 2018. The American Astronomical Society. All rights reserved.

<https://doi.org/10.3847/1538-4365/aab766>



## Understanding the Lomb–Scargle Periodogram

Jacob T. VanderPlas 

University of Washington, eScience Institute, 3910 15th Ave NE, Seattle WA 98195

*Received 2017 August 26; revised 2017 December 6; accepted 2017 December 7; published 2018 May 11*

### Abstract

The Lomb–Scargle periodogram is a well-known algorithm for detecting and characterizing periodic signals in unevenly sampled data. This paper presents a conceptual introduction to the Lomb–Scargle periodogram and important practical considerations for its use. Rather than a rigorous mathematical treatment, the goal of this paper is to build intuition about what assumptions are implicit in the use of the Lomb–Scargle periodogram and related estimators of periodicity, so as to motivate important practical considerations required in its proper application and interpretation.

*Key words:* methods: data analysis – methods: statistical

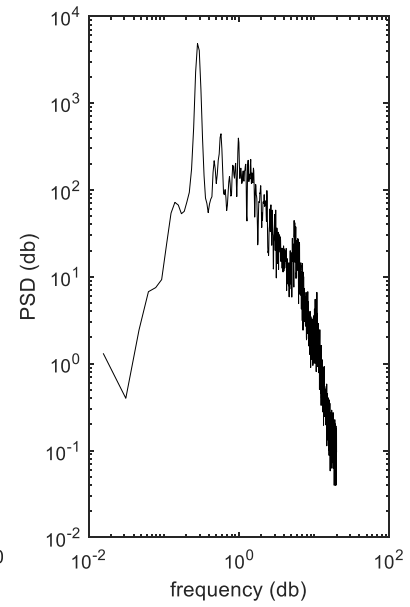
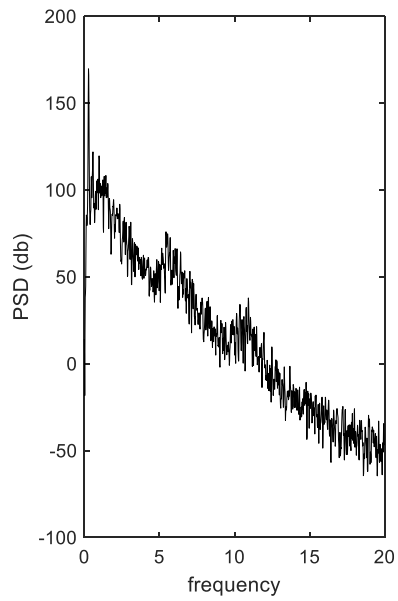
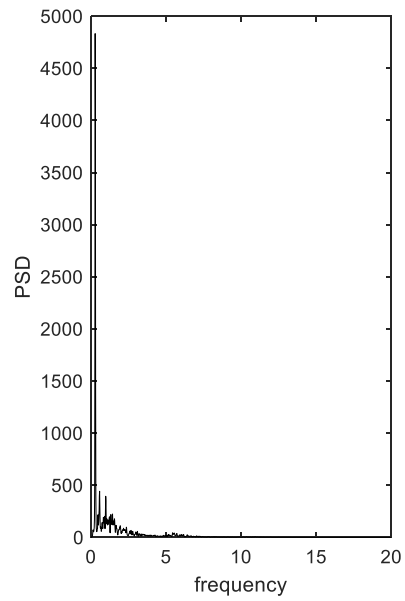
### 1. Introduction

The Lomb–Scargle periodogram (Lomb 1976; Scargle 1982) is a well-known algorithm for detecting and characterizing periodicity in unevenly sampled time-series and has seen particularly wide use within the astronomy community. As an example of a typical

6. How should we understand and report the uncertainty of the determined frequency?

Quantitative treatments of these sorts of questions are presented in various textbooks and review papers, but I have not come across any single concise reference that gives a good intuition

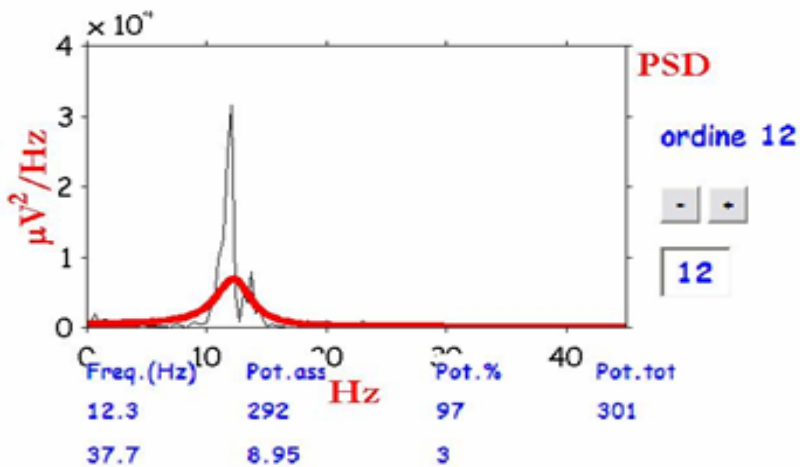
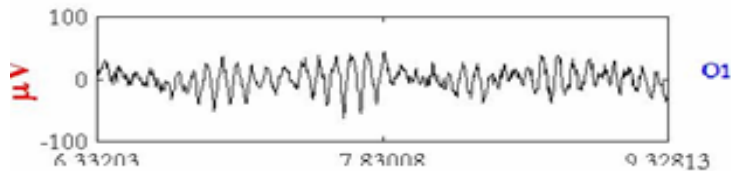
```
pwelch(EEG, [], [], [], fc, 'twosided')
```



# SPETTRO DI POTENZA

## LIMITI DELLO SPETTRO DI POTENZA

EEG: RITMI  
CARATTERISTICI



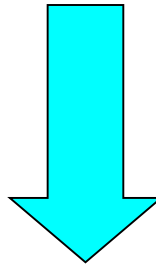
**ESISTONO SEGNALI DIVERSI CHE HANNO LO STESSO SPETTRO DI POTENZA**

LO SPETTRO DI POTENZA:

- DESCRIVE COMPLETAMENTE I **PROCESSI GAUSSIANI**
- CONTIENE LE STESSO INFORMAZIONI DELLA **FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE**
- **SOPPRIME** TUTTE LE **RELAZIONI DI FASE** TRA I RITMI PRESENTI IN UN SEGNALE

# CARATTERISTICHE DEI SEGNALI BIOLOGICI

- SONO GENERATI DA MECCANISMI COMPLESSI E NON SEMPRE NOTI
- SONO RAPPRESENTATIVI DALLA INTERAZIONE TRA PIÙ SISTEMI
- SONO CARATTERIZZATI DA DINAMICITÀ E ADATTATIVITÀ
- PRESENTANO VARIABILITÀ INTER E INTRA SOGGETTIVA



È ANCHE NECESSARIO ESTRARRE  
INFORMAZIONE DIVERSA E  
AGGIUNTIVA RISPETTO ALLO  
SPETTRO DI POTENZA

# METODI E PARAMETRI PER L'ANALISI NON LINEARE

- spazio di embedding
- stima della dimensione del Sistema
- esponenti di Liapunov
- correlation dimension
- sampling entropy
- autosomiglianza ed esponente beta
- dimensione frattale
- Poincaré plot

Per studiare completamente la dinamica di un sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

dovremmo misurare l'evoluzione nel tempo di tutte le  $n$  variabili di stato

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$$

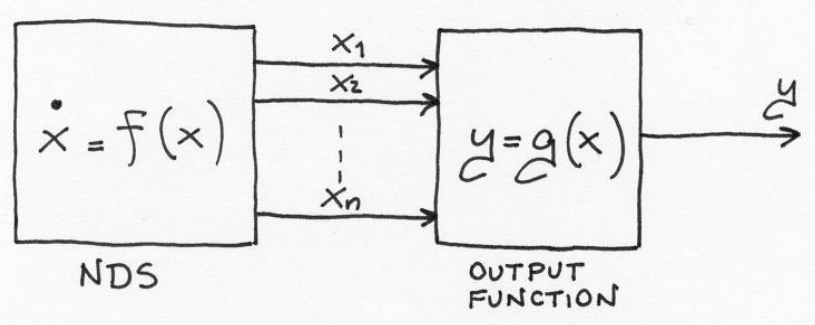
Negli esperimenti di laboratorio o nelle registrazioni di serie storiche o dati raccolti sul campo, si misurano solo poche variabili perché:

- La misura di alcune variabili è tecnicamente impossibile
- La misura costa (tempo, strumentazione)
- Spesso non è neppure noto quante siano le variabili di stato (=non esiste un modello)

Negli **esperimenti** è solitamente disponibile una sola variabile misurata  $y(t) \in R$  (l'**uscita** del sistema)

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

$$y(t) = g(x(t))$$



Fissato un intervallo di campionamento  $\tau > 0$  ("time delay"), si misura una **serie temporale**:

$$y(0), y(\tau), y(2\tau), \dots, y((N-1)\tau)$$

che ha **lunghezza finita** ( $N$ ) ed è, almeno in qualche misura, **affetta da rumore**.

# Quali sono gli scopi dell'analisi di serie temporali?

- Calcolo di **statistiche** (medie, varianze, autocorrelazioni)
- Identificazione di modelli per **simulazione e predizione**

Se la serie è misurata da un sistema in regime caotico

- Misure di **complessità** (dimensione frattale, esponenti di Lyapunov...). L' **attrattore strano** si caratterizza con 2 parametri invarianti:
  - la **dimensione frattale**
  - gli **esponenti di Lyapunov** (almeno 1 positivo per misurare la divergenza della traiettoria nell'attrattore)

in questo caso lo strumento principale è la **ricostruzione** dello stato del sistema **nello spazio delle uscite ritardate**.



# Ricostruzione dello stato

Nella maggior parte delle applicazioni, si lavora con una serie temporale che si misura come uscita di un sistema dinamico non lineare per il quale:

Il **modello** (i.e. le funzioni  $f, g$ ) **non è noto**.

Anche la **dimensione**  $n$  dello spazio di stato è **sconosciuta** (non è noto quante e quali siano le variabili di stato).

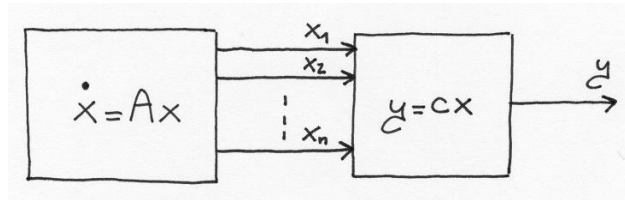
Se assumiamo che il sistema dinamico non lineare che ha generato la serie stia su un **attrattore**, allora l'attrattore può essere “**ricostruito**” utilizzando il metodo delle **coordinate ritardate (time delay reconstruction)**.

# Ricostruzione dello stato: background

Dato un (generico) **sistema lineare**  $n$ -dimensionale

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) = Ax(t)$$

$$y(t) = g(x(t)) = cx(t)$$



La conoscenza del **vettore delle uscite ritardate**  $n$ -dimensionale

$$S = |y(t) \quad y(t + \tau) \quad \dots \quad y(t + (n-1)\tau)|$$

Permette di **ricostruire** lo stato del sistema:  $x(t) = O^{-1}S^T$ , dove

$$O = \begin{vmatrix} c^T & A^T c^T & \dots & (A^T)^{n-1} c^T \end{vmatrix}^T \text{ è la } \textbf{matrice di osservabilità}.$$

$\Rightarrow$  Il vettore delle uscite ritardate è **equivalente** al vettore di stato del sistema. Teorema di Takens

# Time delay reconstruction

Consideriamo un sistema  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  che funziona su un **attrattore**  $A \subset \mathbb{R}^n$  di **dimensione**  $d$  (dim box-counting)

Misuriamo l'uscita del sistema cioè la **serie temporale (scalare)**

$$y(0), y(\tau), y(2\tau), \dots, y((N-1)\tau)$$

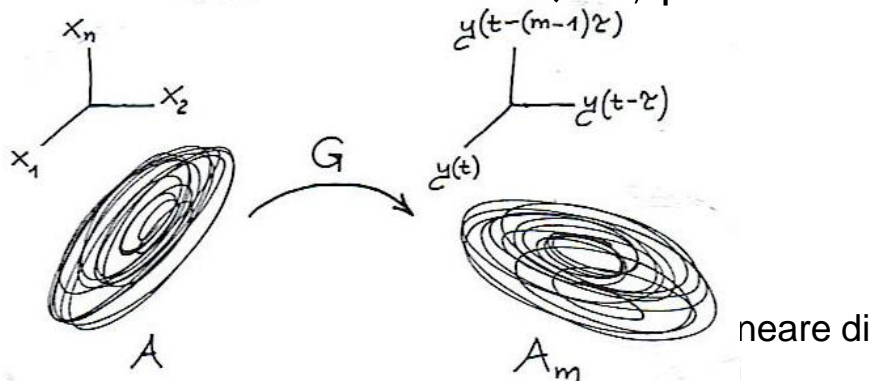
Fissato un intero  $m > 0$ , si definisce il vettore delle **uscite ritardate**:

$$S_m(t) = |y(t) \quad y(t-\tau) \quad \dots \quad y(t-(m-1)\tau)|$$

Si definisce (implicitamente) una funzione  $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$S_m(t) = G(x(t))$$

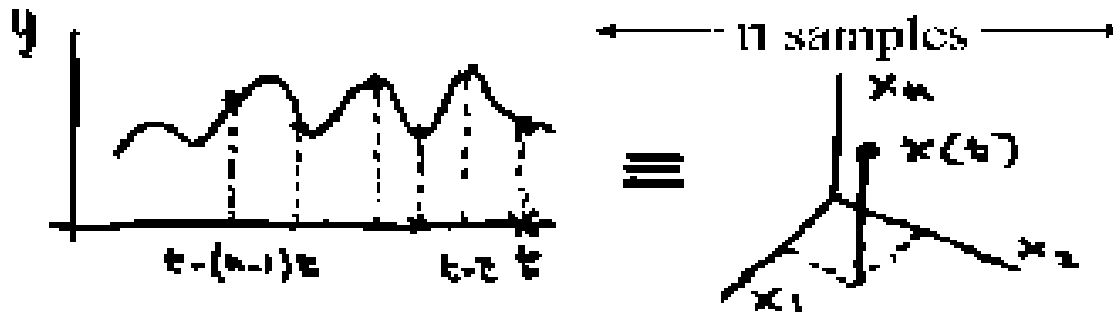
**Def:**  $m$  è una **dimensione di embedding** per l'attrattore  $A$  se la funzione  $G$  ha una corrispondenza uno a uno in  $A$  (i.e., per  $x' \neq x''$  in  $A$ , risulta  $G(x') \neq G(x'')$ ).



## Embedding (ricostruzione in uno spazio $m$ -dimensionale)

- La tecnica di rappresentare una serie temporale misurata come una sequenza di punti in uno spazio  $n$ -dimensionale si chiama **time-lag embedding**
- Takens afferma che:
  - le dinamiche ricostruite sono geometricamente simili a quelle originali (sia per sistemi continui che discreti)
- $(y(t), y(t-\tau), \dots, y(t-(m-1)\tau))$ :  
questa sequenza di punti è la traiettoria della serie.  $m$  è la dimensione di embedding e  $\tau$  è l'embedding lag

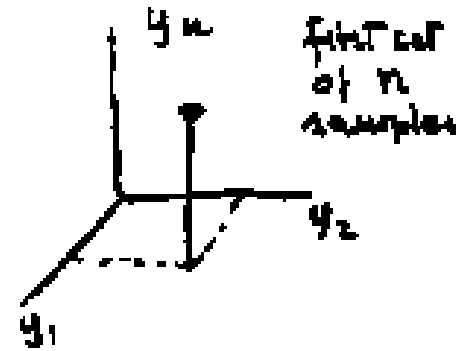
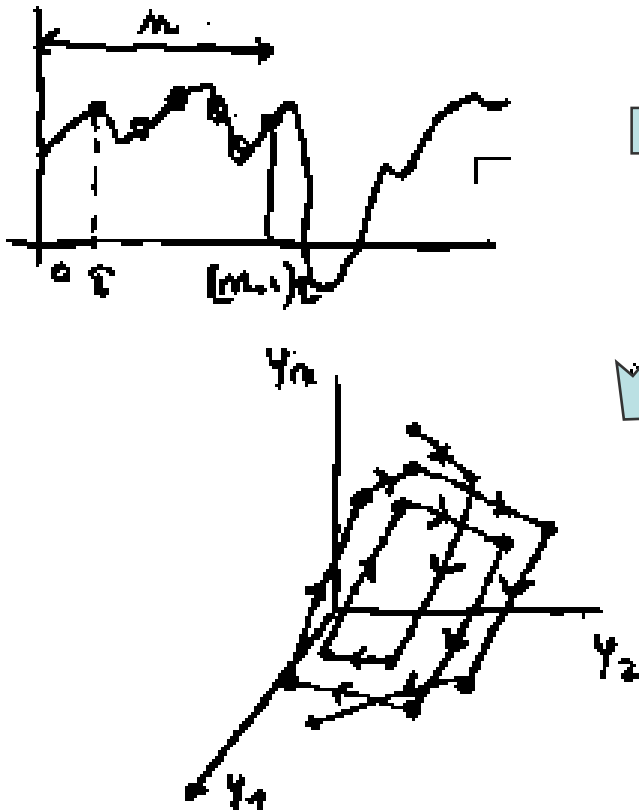
Takens(1981):  $x(t)$  è “equivalente” a  $(y(t), y(t-\tau), \dots, y(t-(m-1)\tau))$



Data la serie temporale scalare di uscita

$Y = \{\dots, y(t-\tau), y(t), y(t+\tau), \dots\}$  e la dim di embedding  $m$ , si costruisce la serie  $S$  dei vettori ( $m$ -dimens) delle uscite ritardate

$S = \{\dots, s_m(t-\tau), s_m(t), s_m(t+\tau), \dots\}$  dove  $s_m(t) = (y(t), y(t-\tau), \dots, y(t-(m-1)\tau)$

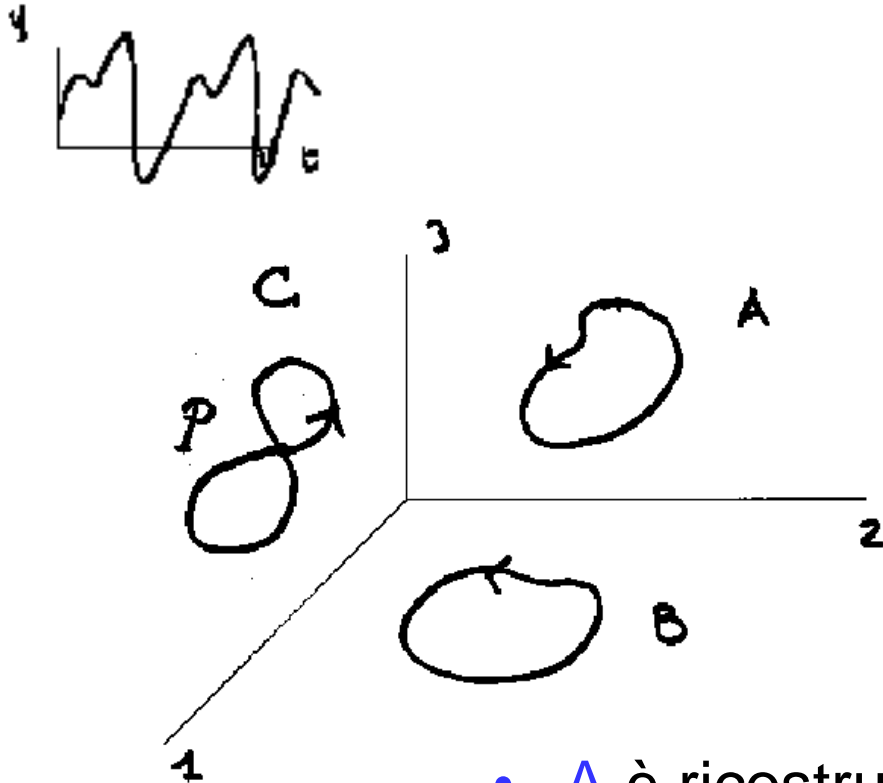


- L' attrattore ricostruito ha la **stessa dimensione** e gli **stessi esponenti di Lyapunov** dell'attrattore "vero"
- Sono parametri invarianti

## Nota bene:

se  $m$  è un **embedding**, non ci sono “auto-intersezioni” nello spazio dei vettori delle coordinate ritardate.

Perché ciò accada è **necessario** (ma non sufficiente) che  $m > d$

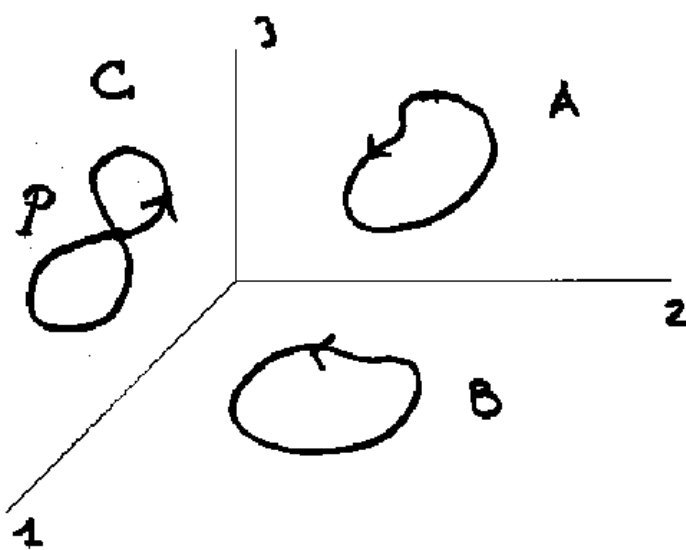


## Esempio:

Assumiamo che il sistema sia 3-dimensionale e che l'**attrattore sia un ciclo** ( $n=3$ ,  $d=1$ )

Se siamo **sull'attrattore**, la serie temporale è **periodica**

- **A** è ricostruito con  $m=3$  uscite ritardate
- **B** e **C** con  $m=2$  uscite ritardate



## Dimensione $m$ di ricostruzione (continua)

- Usando  $m=3$  campioni ritardati, si ricostruisce il ciclo A in uno spazio a 3 dimensioni
- Con  $m=2$  campioni ritardati, ricostruiamo B o C in uno spazio 2-dimensionale.
- Nel caso C ci sono punti critici: punti del ciclo C vicini a  $P$  sembrano vicini gli uni agli altri ma possono essere lontani nello spazio di stato "vero". Sono **Falsi Vicini**
- La dimensione sarà stimata correttamente ( $d=1$ ) da tutti gli algoritmi.
- L'unico esponente ( $d^+=1$ ) e' quello nullo ( $L=0$ ). Tale esponente è correttamente calcolato nel caso A ( $m=3$ ) e nel caso B ( $m=2$ ) ma non nel caso C ( $m=2$ ) a causa dei **falsi vicini**.

Quanto deve essere grande la **dimensione di embedding**  
*m*?

**Teorema:** Whitney, 1936; Mané, 1981; Takens, 1981; Yorke and coworkers, 1991:

Se assumiamo che  $A$  sia un attrattore con dimensione (box-counting)  $d$ ,  $m$  è una dimensione di embedding se

$$m > 2d.$$

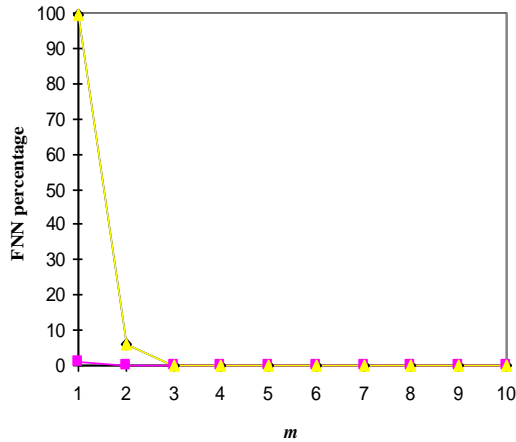
E' la condizione **sufficiente** ma spesso è utile/comodo trovare una dimensione di embedding più piccola  
 $d < m \leq 2d$

**Nota bene:** negli esperimenti,  $d$  non è noto *a priori*.

Il teorema di embedding garantisce che, se l'attrattore è a bassa-dimensione, allora può essere ricostruito uno spazio di embedding a bassa dimensione (però occorre cercarlo per tentativi...).



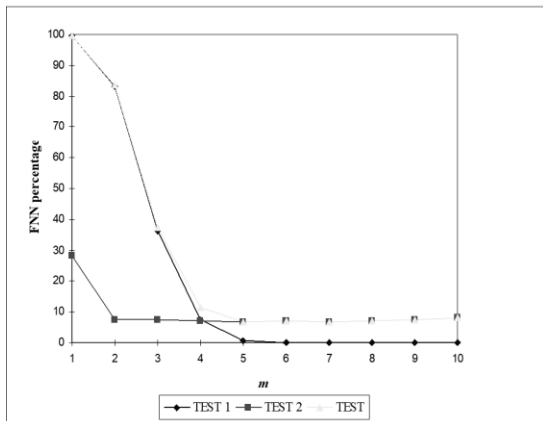
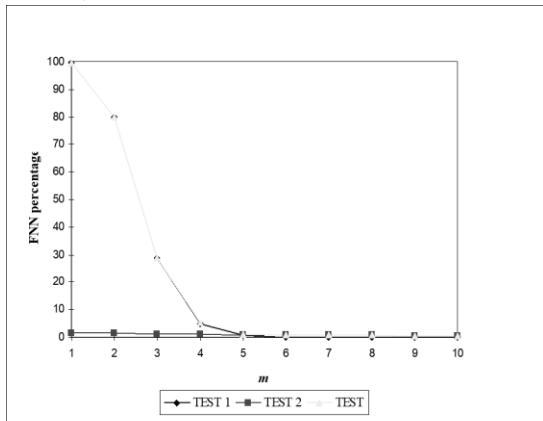
# Stima della Dimensione (intero $m$ ) dello spazio con il metodo dei Falsi Vicini



Lorenz

1. Si ricostruisce la traiettoria in uno spazio di dimensione  $m$
2. Si ripete l'operazione per  $m+1$
3. Si calcola la distanza euclidea tra un punto e tutti gli altri
4. Si calcola la percentuale di punti VICINI (distanza al di sotto di una soglia fissata) in  $m$  e in  $m+1$
5. Se 2 punti si trovano vicini in  $m$  per effetto della proiezione (in uno spazio troppo piccolo) non lo saranno piu' per  $m+1$
6. Si ripete al crescere di  $m$  fino ad individuare la dimensione corretta

Serie  
R-R



di di analisi non lineare di  
serie temporali

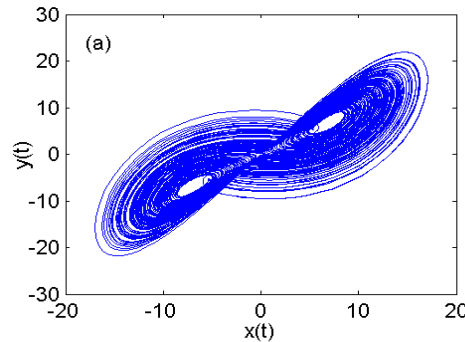
# La scelta dell'intervallo $\tau$ di ricostruzione

Osservazione: in base alla teoria, quasi tutti i valori del ritardo  $\tau$  vanno bene per la ricostruzione dell'attrattore.

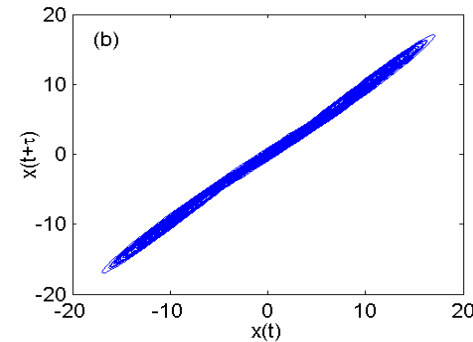
In pratica (i.e. da un punto di vista numerico), alcuni valori di  $\tau$  funzionano meglio di altri.

Esempio: ricostruzione di serie temporale generata dall'attrattore di Lorenz

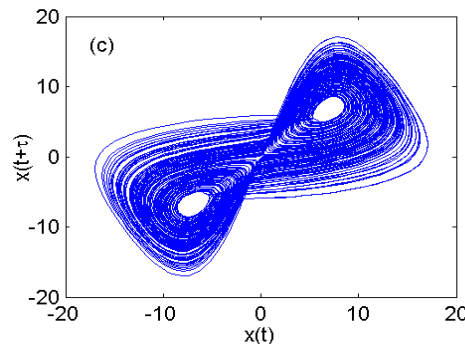
(a) attrattore originale,



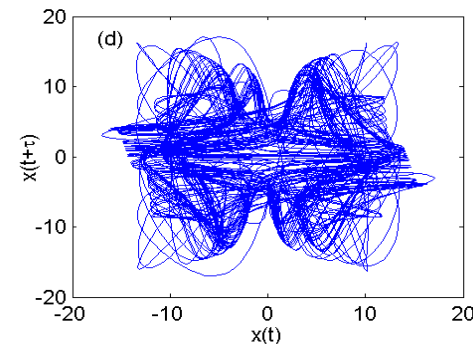
(b)  $\tau=1$ ,



(c)  $\tau=15$



(d)  $\tau=200$ .



# Scelta dell'intervallo $\tau$ di ricostruzione

Esistono diversi **metodi empirici** che sono stati proposti allo scopo di individuare un **valore adatto del ritardo  $\tau$** :

- Il primo zero della funzione di autocorrelazione (o altri valori specificati:  $1/e$ , 0.5, 0.1)
- Primo minimo della funzione di Mutua Informazione.

campo della meteorologia con l'attrattore di Lorenz. Le equazioni differenziali del sistema di Lorenz sono le seguenti:

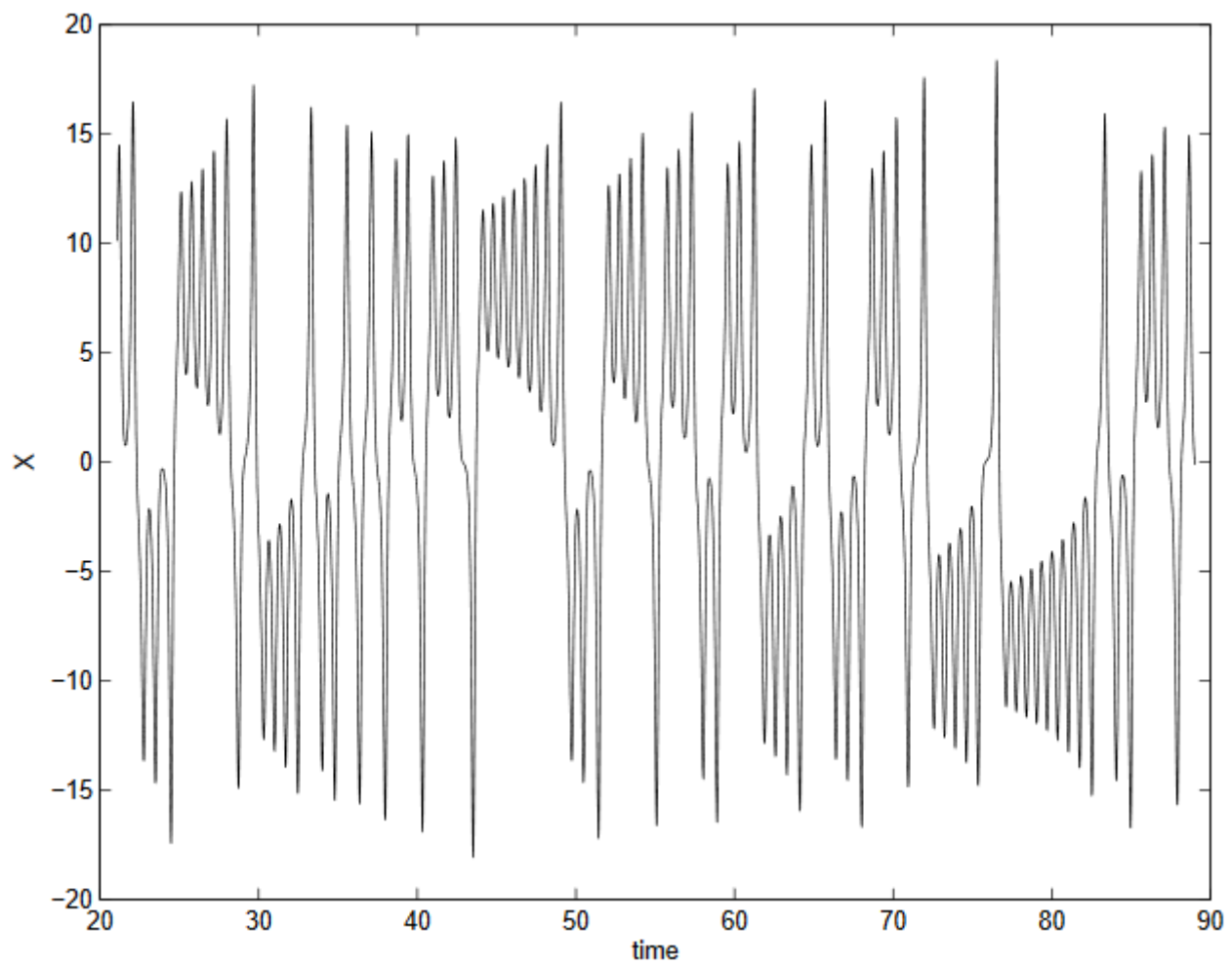
$$\dot{x} = a(y - x)$$

$$\dot{y} = x(b - z) - y$$

$$\dot{z} = xy - cz$$

Ottenuto discretizzando le equazioni della fluidodinamica di Navier-Stokes e quindi una versione enormemente sintetica della dinamica dell'atmosfera.

$a = 10$ ,  $b = 8/3$  e  $c = 23$  (è variabile)



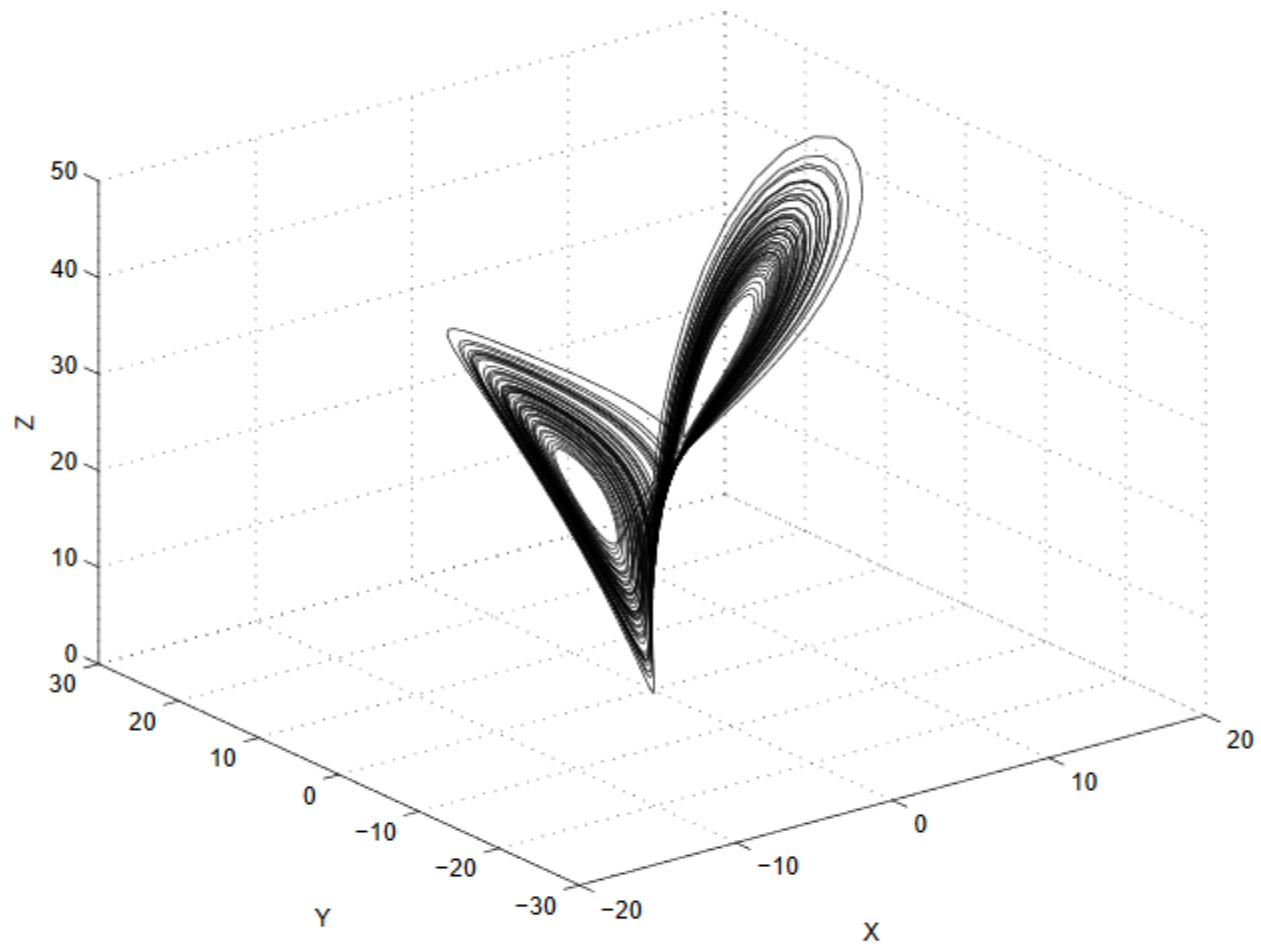


Figura 2.9: Attrattore di Lorenz nello spazio delle fasi.

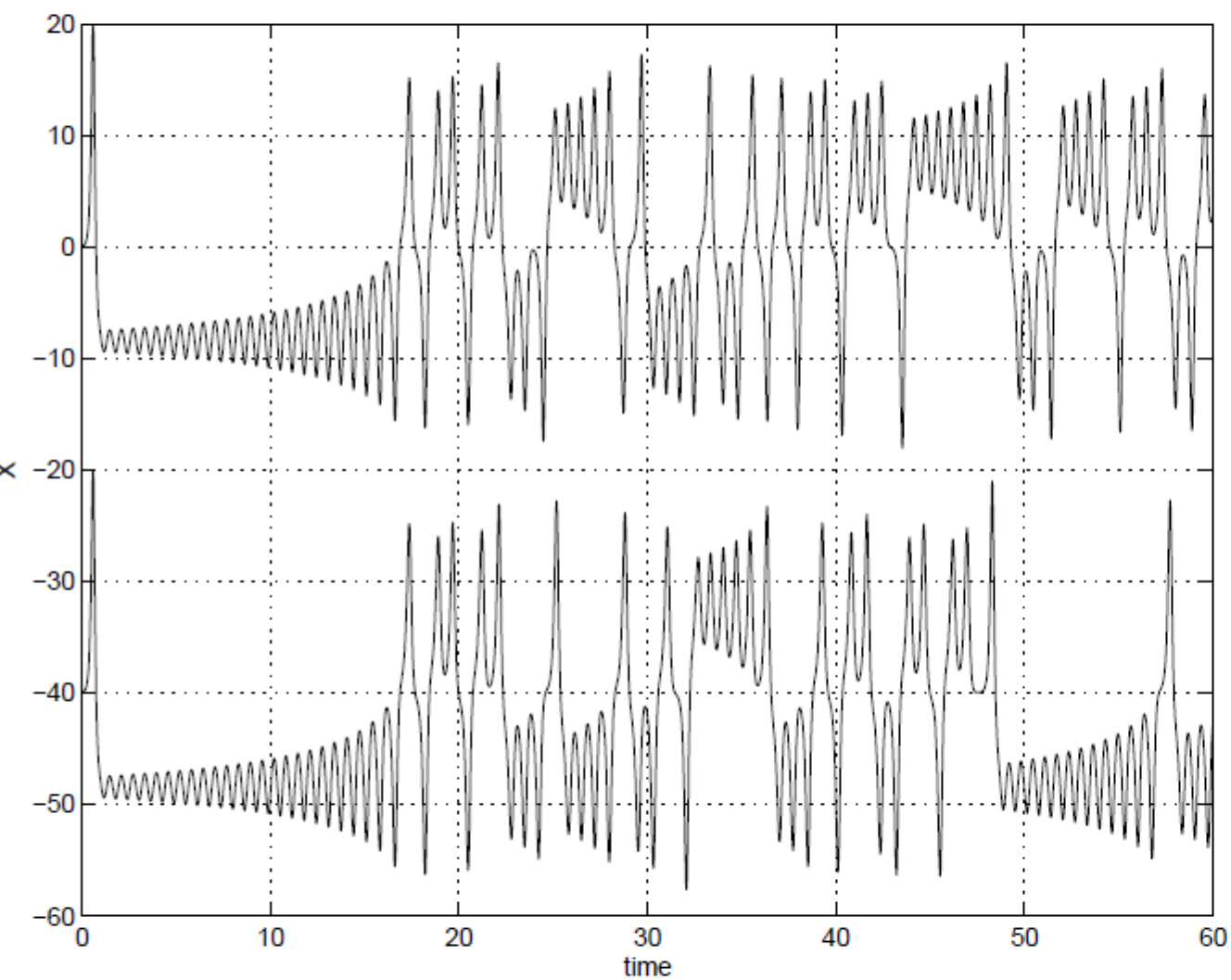


Figura 2.12: Due soluzioni del sistema di Lorenz con condizioni iniziali

vicinissime

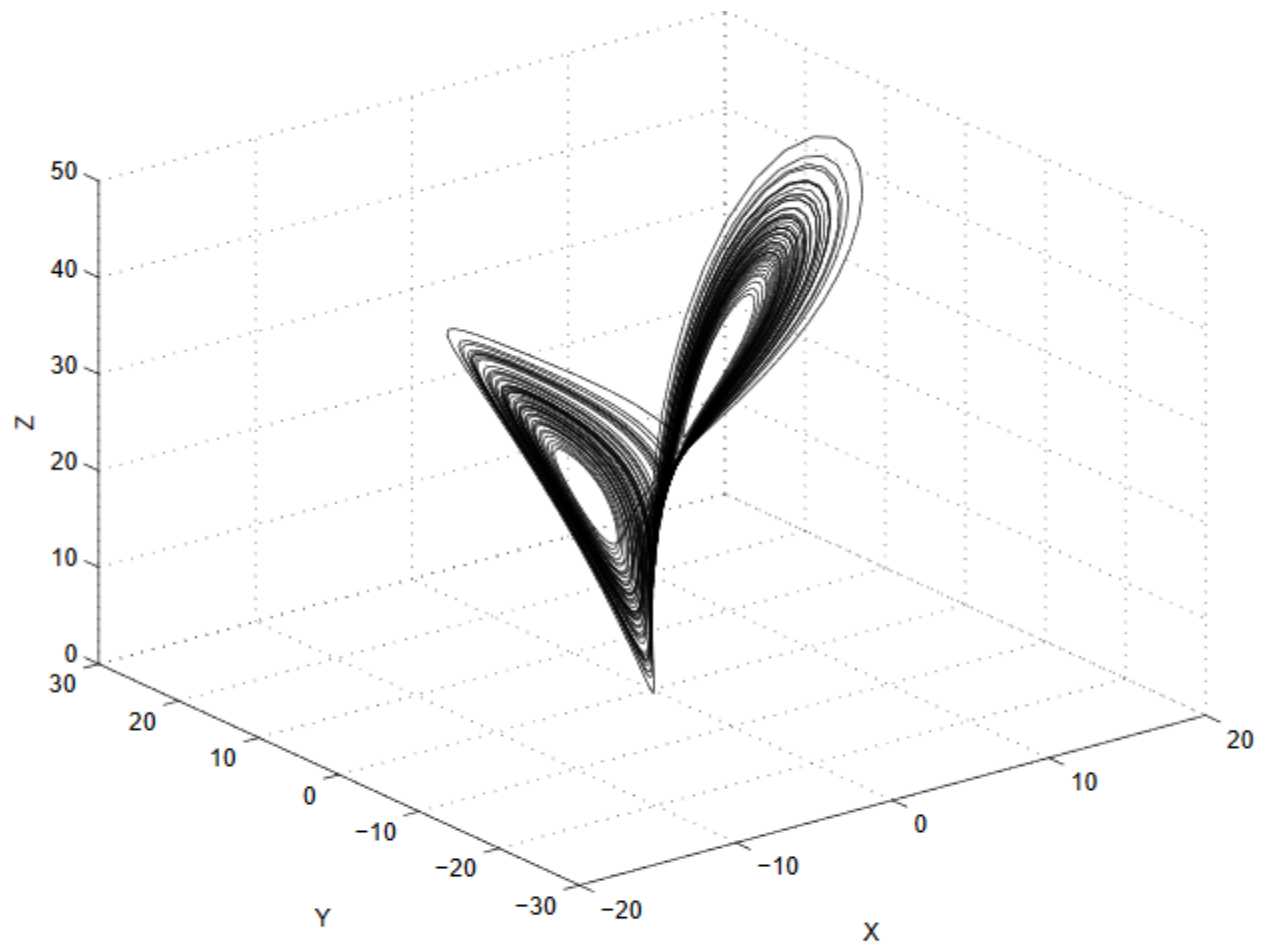


Figura 2.9: Attrattore di Lorenz nello spazio delle fasi.



# Test di Ipotesi basato sui dati surrogati (1)

Ipotesi nulla: è l'ipotesi che vogliamo confutare.

Vogliamo rifiutare l'ipotesi che un processo stocastico lineare sia il meccanismo che ha generato i nostri dati

Noi vogliamo dimostrare che la struttura della serie è inconsistente con l'ipotesi di linearità, ovvero che i modelli lineari sono inadeguati per spiegare i dati della serie originale.

## Dati Surrogati:

Sono serie di dati casuali che condividono con la serie originale  $x(t)=1,2...N$ , alcune proprietà lineari (media, varianza, spettro di Fourier)

## Test di Ipotesi basato sui dati surrogati (2)

**Statistica discriminante**: è un numero o una funzione che quantifica alcune proprietà di una serie temporale.

**Funzione di Autocorrelazione:**  $\gamma_{xx}(\tau) = E[x_n^* \cdot x_{n+\tau}]$

**Mutua Informazione:**  $I(\tau) = \sum_{n=1}^N P(x_n, x_{n+\tau}) \cdot \ln \frac{P(x_n, x_{n+\tau})}{P(x_n) \cdot P(x_{n+\tau})}$

**Criterio di rifiuto**: specifica per quali valori della statistica discriminante noi rifiutiamo l'ipotesi nulla.

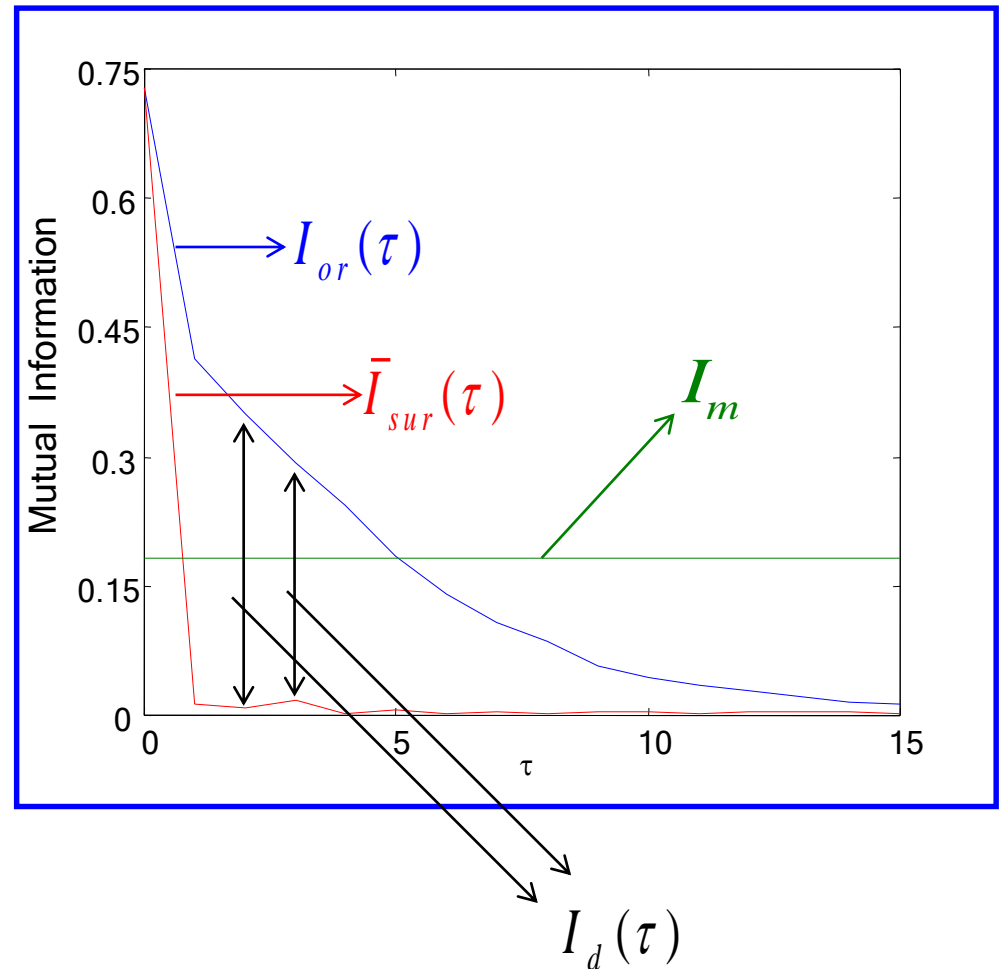
# Variazione percentuale della Mutua Informazione

$$\bar{I}_{sur}(\tau) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I_{si}(\tau)$$

$$I_d(\tau) = I_{or}(\tau) - \bar{I}_{sur}(\tau)$$

$$I_m = \frac{1}{T} \sum_{\tau=1}^T I_{or}(\tau)$$

$$\Delta I_{\%}(\tau) = \frac{I_d(\tau)}{I_m}$$



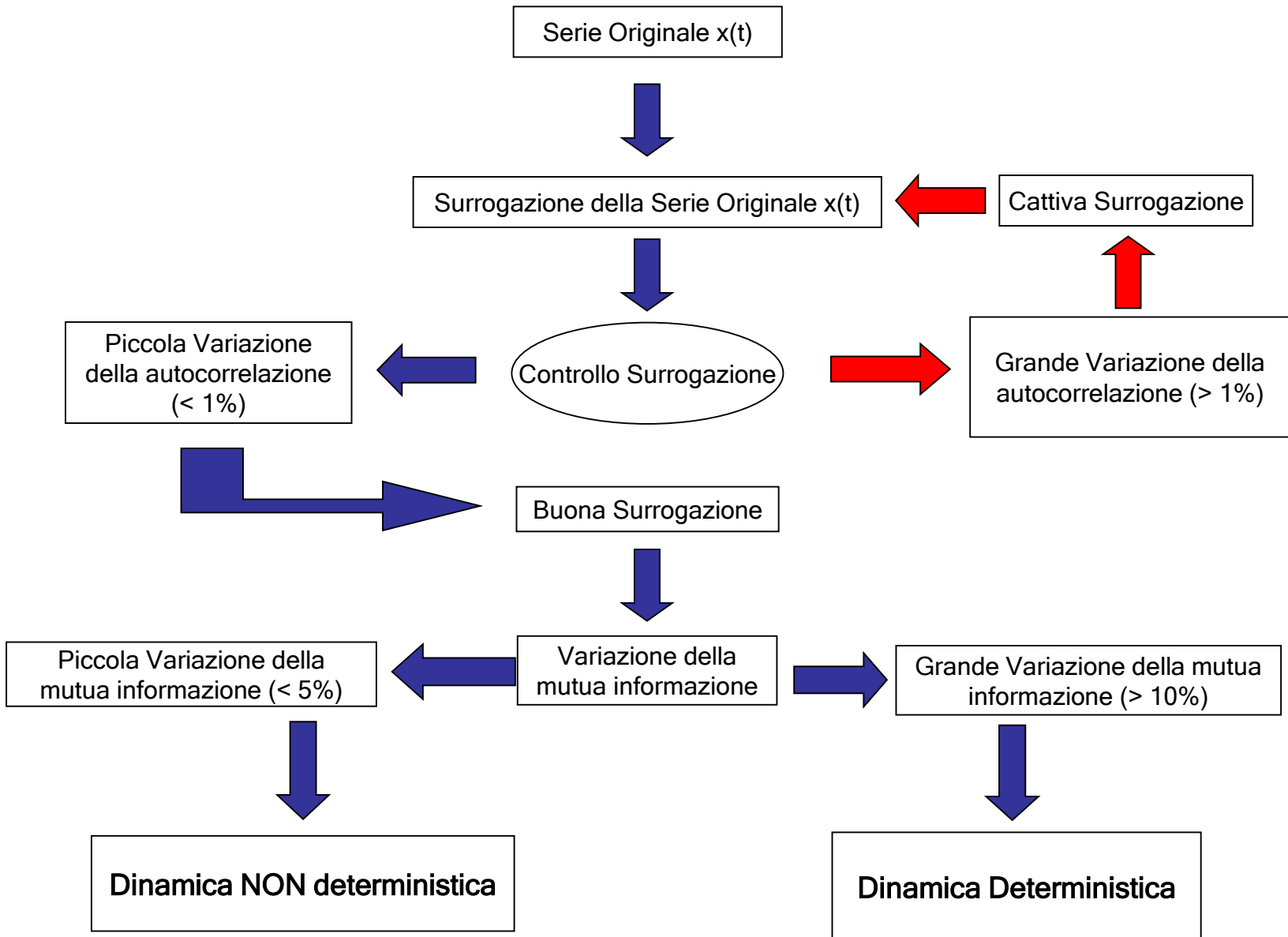
# Dati Surrogati

## Metodi di Surrogazione:

**Randomizzazione delle fasi (Osborne 1986)**

**AAFT Amplitude Adjusted Fourier Transform (Theiler 1992)**

**AAFT Ricorsivo (Schreiber 1998)**



# Calcolo della dimensione di correlazione

La dimensione  $d$  dell'attrattore  $A$  coincide con quella dell'attrattore ricostruito  $A_m$

Perciò, se è nota una dimensione di embedding  $m$ ,  $d$  può essere calcolata come **dimensione di correlazione**, utilizzando la serie temporale  $S_m(t)$  che definisce l'attrattore ricostruito.

MA

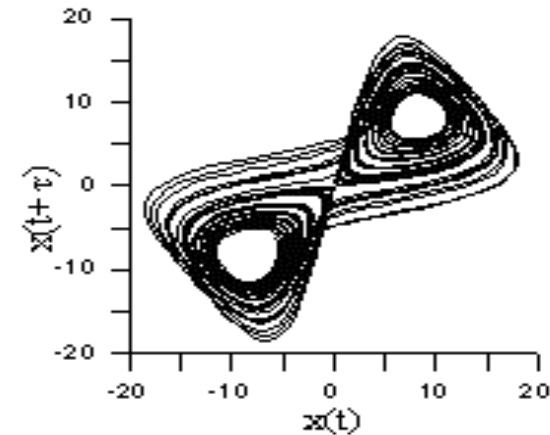
in genere  $d$  non è nota a priori e neppure  $m$

Procedimento empirico:

Calcolare la dimensione di correlazione  $d(m)$  per una successione di valori crescenti

Esempio: attrattore di Lorenz

Spazio delle uscite ritardate  $S_m(t)=2$



per ogni valore di  $m$  tra 2 e 20 si calcola la **funzione di correlazione**

$$C_m(r) = \frac{\#\text{coppie}(y_m(i), y_m(j)) \text{ t.c. } \|(y_m(i) - y_m(j))\| < r}{\#\text{coppie}(y_m(i), y_m(j))}$$

per vari valori di  $r$

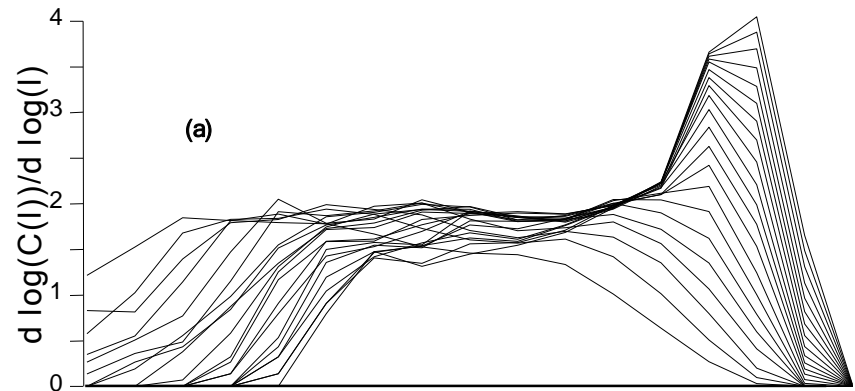
## Esempio: sistema di Lorenz

Per  $r$  piccolo,  $C_m(r)$  scala con  $r$  secondo la legge:

$$\log C_m(r) = d \log r + \alpha \quad C_m(r) = 10^{\alpha} * r^d$$

per cui la pendenza  $\Delta \log C_m(r) / \Delta \log r$  fornisce la stima di  $d$

Il grafico  $\Delta \log C_m(r) / \Delta \log r$  in funzione di  $\log r$  fornisce la stima della dimensione ( $d=2.06$ )





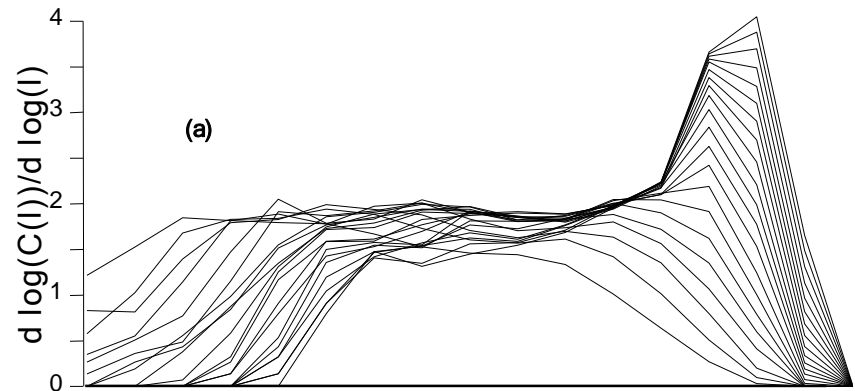
Esempio: sistema di Lorenz

Per  $r$  piccolo,  $C_m(r)$  scala con  $r$  secondo la legge:

$$\log C_m(r) = d \log r + \alpha$$

per cui la pendenza  $\Delta \log C_m(r) / \Delta \log r$  fornisce la stima di  $d$

Il grafico  $\Delta \log C_m(r) / \Delta \log r$  in funzione di  $\log r$  fornisce la stima 2.06.



## Calcolo degli esponenti di Liapunov

- Calcolo del primo (=massimo) esponente di Liapunov  $L_1$  associato a una serie temporale
  - E' molto informativo perché  $L_1$  caratterizza la dinamica del sistema
  - E' piu' conveniente e affidabile del calcolo dell'intero spettro:  $L_1, L_2 \dots L_m$

Fissato  $m$ , si costruisce la serie **dei vettori delle uscite ritardate**

$$\{\dots, S_m(t), S_m(t+1), \dots\}$$

Preso un vettore  $S_m(i)$ , si cerca nella serie  $S$ , un vettore  $S_m(j)$ , **molto vicino**, tale che la distanza  $\Delta(0) = |S_m(i) - S_m(j)|$

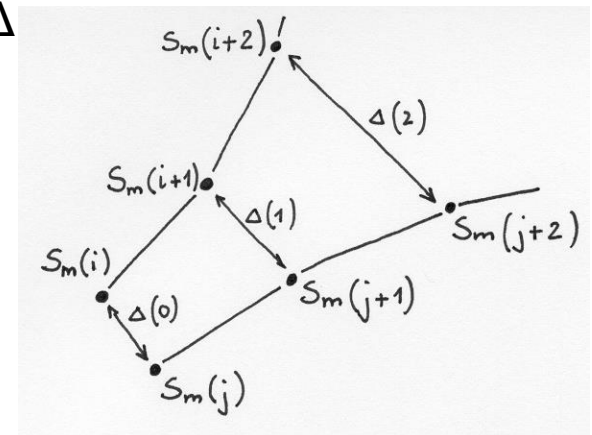
Possa essere considerata **infinitesimale**.

Quindi, dalla serie  $S$ , si estrae la funzione  $\Delta(t) = |S_m(i+t) - S_m(j+t)|$

che rappresenta l'evoluzione nel tempo della distanza  $\Delta$  tra i due punti considerati. In media, per  $t$  piccolo, ci si aspetta che  $\Delta(t)$  evolva come

$$\Delta(t) \cong \Delta(0) \exp(L_1 t)$$

dove  $L_1$  è il primo esponente di Liapunov LE.

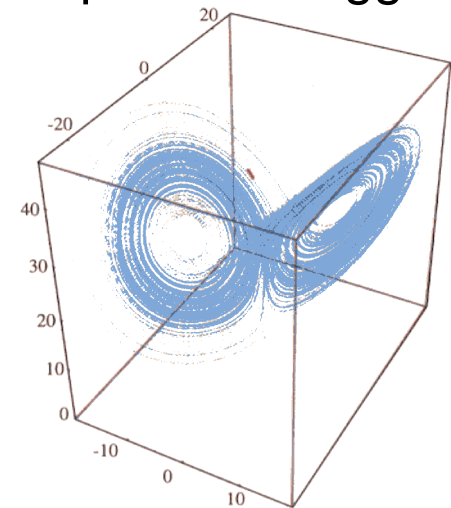


- Kaplan e Yorke [Kaplan et al., 1978] hanno congetturato che la dimensione frattale e spettro degli esponenti di Liapunov (la geometria e la dinamica del sistema) siano in stretta relazione.
- La formula di Kaplan e Yorke stima la dimensione frattale dell'attrattore  $d$  come

$$d_{KY} = k + \frac{L_1 + L_2 + \dots + L_k}{|L_{k+1}|}$$

dove  $k$  è il massimo intero per cui la somma dei  $k$  esponenti maggiori rimane **non negativa**.

**Esempio:** sistema di Lorenz ( $n=3$ ),  
 Esponenti  $\lambda_1=0.905$ ,  $\lambda_2=0$ ,  $\lambda_3= -14.57$ .  
 per  $k=2$  si ha  $d_{KY}=2+0.905/14.57=2.062$   
 dimensione frattale dell'attrattore di Lorenz.



# Esempio: ricostruzione dell'attrattore di Lorenz

- **A** - si misura la serie temporale
- **B** - si ricostruisce l'attrattore con il metodo delle coordinate ritardate. L'attrattore ricostruito è simile all'originale.  $\tau$  è l'intervallo di ricostruzione
- **C** - si stima la dimensione di embedding con l'algoritmo dei Falsi Vicini (False Nearest Neighbors *FNN*).  $m=3$
- **D** - si calcola la Dimensione di Correlazione. La regione "piatta" fornisce un valore di  $D_2$  poco sopra 2
- **E** - stima dello spettro degli esponenti di Lyapunov (*LE*)
- **F** - Calcolo degli esponenti per diversi valori di  $m$

# Dimensione

Comunemente utilizziamo il concetto di

- *dimensione euclidea*

ma anche di

- *dimensione topologica*

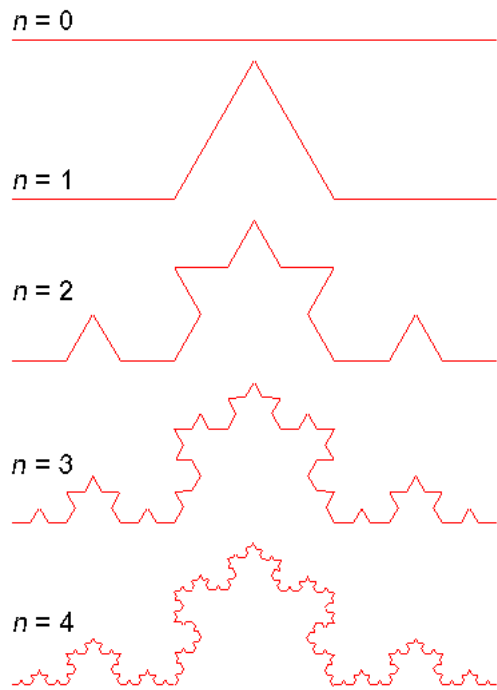
# Dimensione euclidea

- dimensione euclidea  $D_E$  indica il numero di coordinate necessarie a specificare un oggetto in un certo spazio:
  - $D_E = 1$  un punto sulla retta
  - $D_E = 2$  un punto nel piano
  - $D_E = 3$  un punto nello spazio

# Dimensione topologica

- Un punto o un insieme di punti totalmente sconnesso ha dimensione  $D_t = 0$
- tutti gli oggetti che possono essere divisi da elementi di  $D_t=0$  hanno dimensione  $D_t=1$
- tutti gli oggetti che possono essere divisi da elementi di  $D_t=1$  hanno dimensione  $D_t=2$
- tutti gli oggetti che possono essere divisi da elementi di  $D_t=2$  hanno dimensione  $D_t=3$

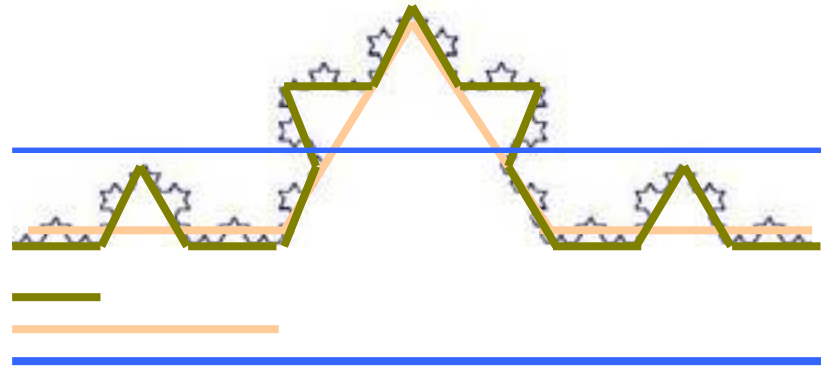
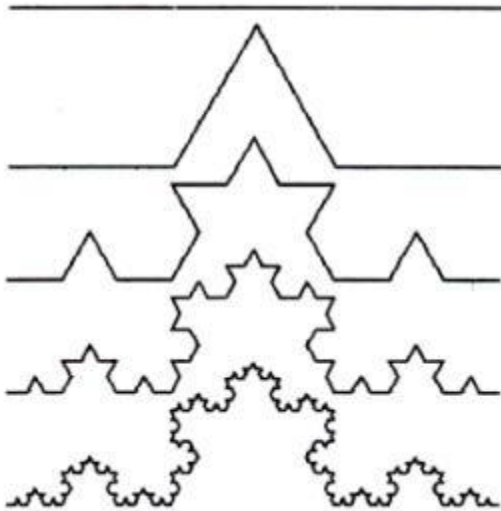
# Curva di Koch



- segmento unitario diviso in 3 parti
- sostituzione del terzo interno con due lati di un triangolo equilatero di lato  $1/3$  (cioe' la lunghezza del segmento sostituito)
- sostituzione del terzo interno di ogni lato con triangolo equilatero di lato uguale al segmento sostituito



# Curva di Koch



$l_0$

**Unita' di misura**

**Lunghezza apparente  
della curva**

( ——— )  $l_0$

$l_0$

( ——— )  $1/3 l_0$

$4/3 l_0$

( ——— )  $1/9 l_0$

$16/9 l_0 = (4/3)^2 l_0$

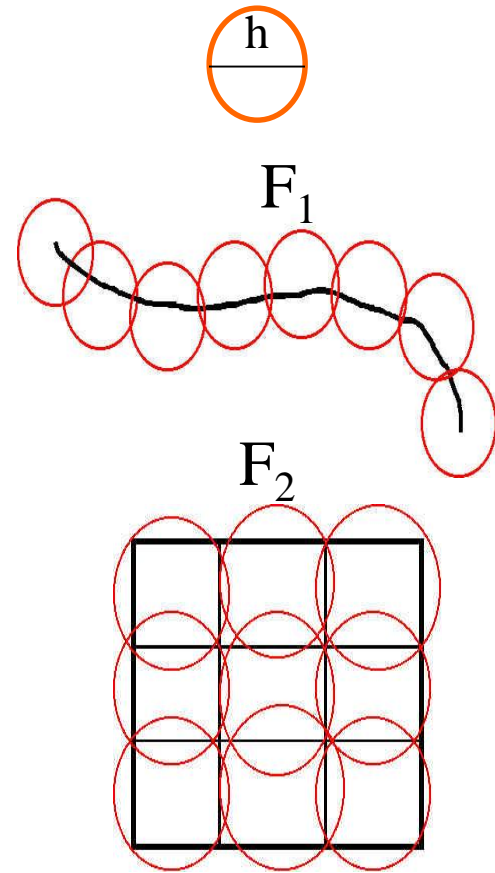
( ..... )  $(1/3)^n l_0$

$(4/3)^n l_0$

# Ricoprimento

- $Mis(F_1) = \lim_{h \rightarrow 0} n(h) h$
- $Mis(F_2) = \lim_{h \rightarrow 0} n(h) h^2$

( $n(h)$  = minimo numero di dischi di diametro  $h$  necessari per ricoprire la figura)



# Misura $d$ - *dimensionale*

- Sia  $X$  un sottinsieme di uno spazio metrico e sia  $d > 0$ .
- $\{S_i\}$  e' l'insieme di tutti i ricoprimenti finiti di  $X$  tali che  $(\text{diam } S_i) \leq \rho, \rho > 0$

$$m_d(X, \rho) = \inf \{ \sum_i (\text{diam } S_i)^d \}$$

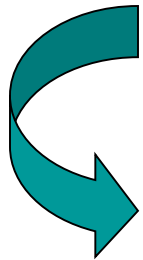
Si definisce ***misura esterna  $d$ -dimensionale*** la  
quantita'  $m_d(X)$ :

$$m_d(X) = \lim_{\rho \rightarrow 0} m_d(X, \rho)$$

- Nota: il limite puo' essere uguale a zero, oppure infinito, oppure **finito e positivo**.

# Dimensione curva di Koch

- Per ogni lato della curva il numero di ricoprimenti al passo  $n$  e' proporzionale a  $4^n$  e il fattore di magnificazione e' proporzionale a  $\rho=1/3^n$



$$D_C = \lim_{\rho \rightarrow 0} \log(N)/\log(1/\rho)$$

$$D_C = D_H = \log(4)/\log(3) = 1.2618\dots$$

- E la dimensione topologica?...

$$D_T = 1$$

$$(\dots) (1/3)^n l_0$$

$$(4/3)^n l_0$$

# Dimensione insieme di Cantor

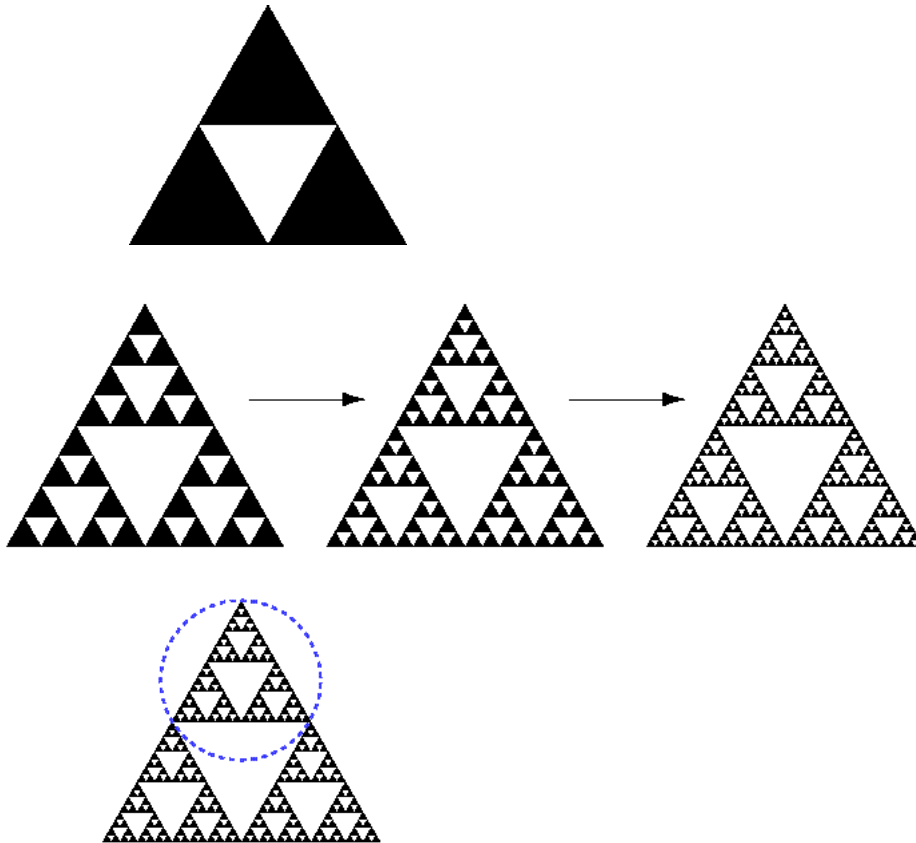


- Inizio: segmento
- Suddividere in 3 parti e rimuovere il segmento centrale
- Ripetere la rimozione in ogni segmento
- Rimangono 2 parti scalate di  $1/3$

$$D_H = \log(2)/\log(3) = 0.6309\dots$$

$$D_T = 0$$

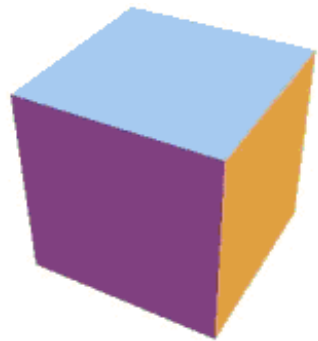
# Dimensione triangolo Sierpinski



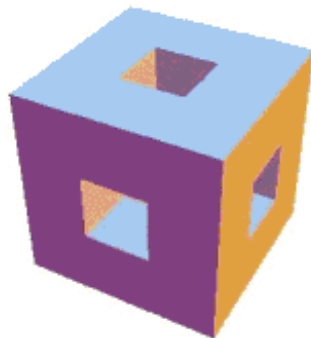
- Inizio: triangolo equilatero
  - Rimuovere il triangolo interno formato dai punti medi dei 3 lati
  - Ripetere la rimozione in ogni triangolo rimasto
  - Ogni triangolo contiene 3 copie, ognuna scalata di  $1/2$
- $D_H = \log(3)/\log(2) = 1.5849\dots$

$$D_T = 1$$

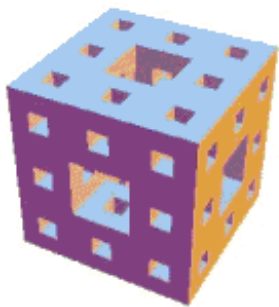
# Dimensione spugna di Menger



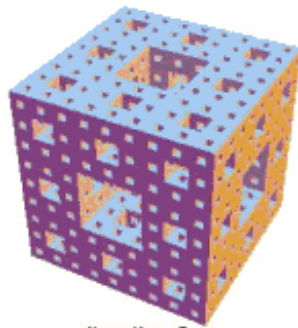
R=1 N=1



First iteration  
R=1/3 N=20



Iteration 2  
R=1/9 N=400



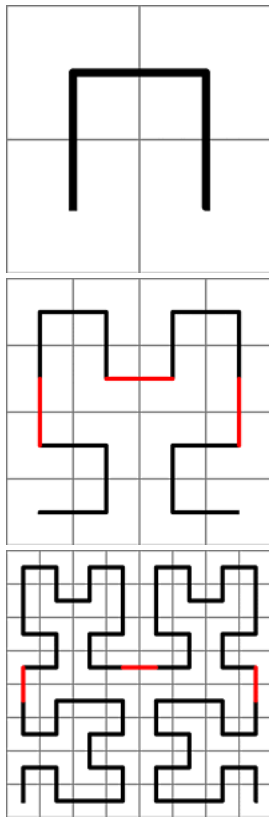
Iteration 3  
R=1/27 N=8000

- Inizio: cubo
- Suddividere in 27 cubi di lato  $1/3$  e rimuovere il cubo centrale e quelli nel centro di ogni faccia. Rimangono 20 sottocubi.
- Ripetere la rimozione in ogni sottocubo

$$D_H = \log(20)/\log(3)=2.7268\dots$$

$$D_T = 2$$

# Dimensione curva di Hilbert



- Inizio: elemento base
- Replicare 4 volte l'elemento base riducendone le dimensioni a 1/2
  - mantenere inalterata posizione elementi superiori
  - ruotare di 90° a sin e dx elementi inferiori
  - effettuare connessioni fra gli elementi
- Ripetere la replicazione e le connessioni

$$D_H = \log(4)/\log(2)=2$$

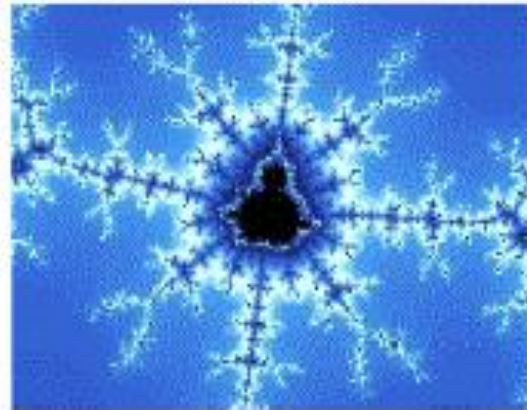
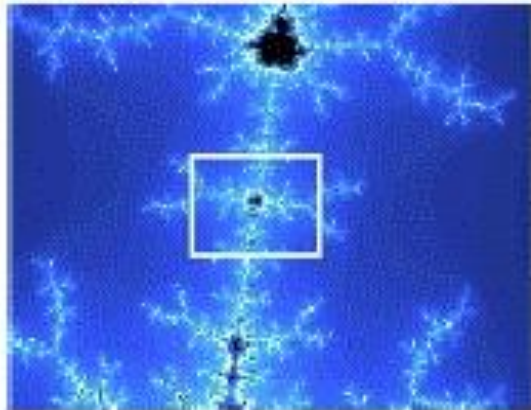
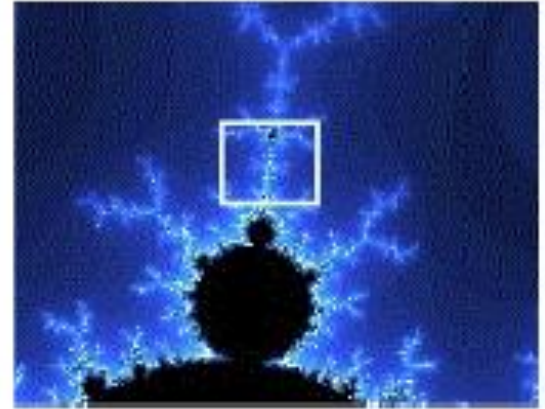
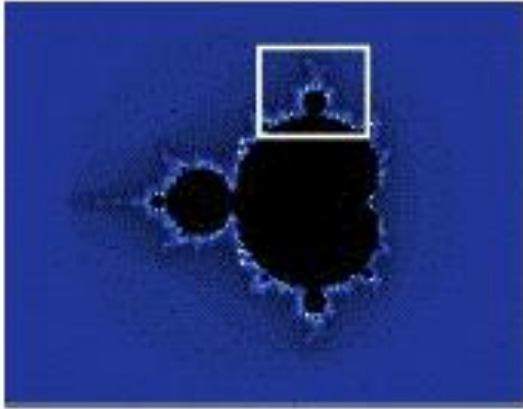
$$D_t = 1$$



# Gli oggetti frattali

- Sono autosimili
- la loro misura, intesa in senso euclideo, non converge ad un numero finito
- si possono costruire per iterazione
  - per addizione
  - per sottrazione
- attrattori di sistemi caotici (o loro frontiera)

# Insieme di Mandelbrot



# Misura della dimensione frattale

- La misura della dimensione frattale ( $D$ ) di un oggetto consiste essenzialmente nella misura di una certa proprietà ( $P$ ) dell'oggetto rispetto la risoluzione spaziale con cui l'oggetto è esaminato ( $r$ )
- $P = kr^{f(D)}$  con  $k$  costante e  $f$  funzione lineare in  $D$

$$\ln(P) = k' + f(D)\ln(r)$$

# Autosimiglianza (self-similarity)

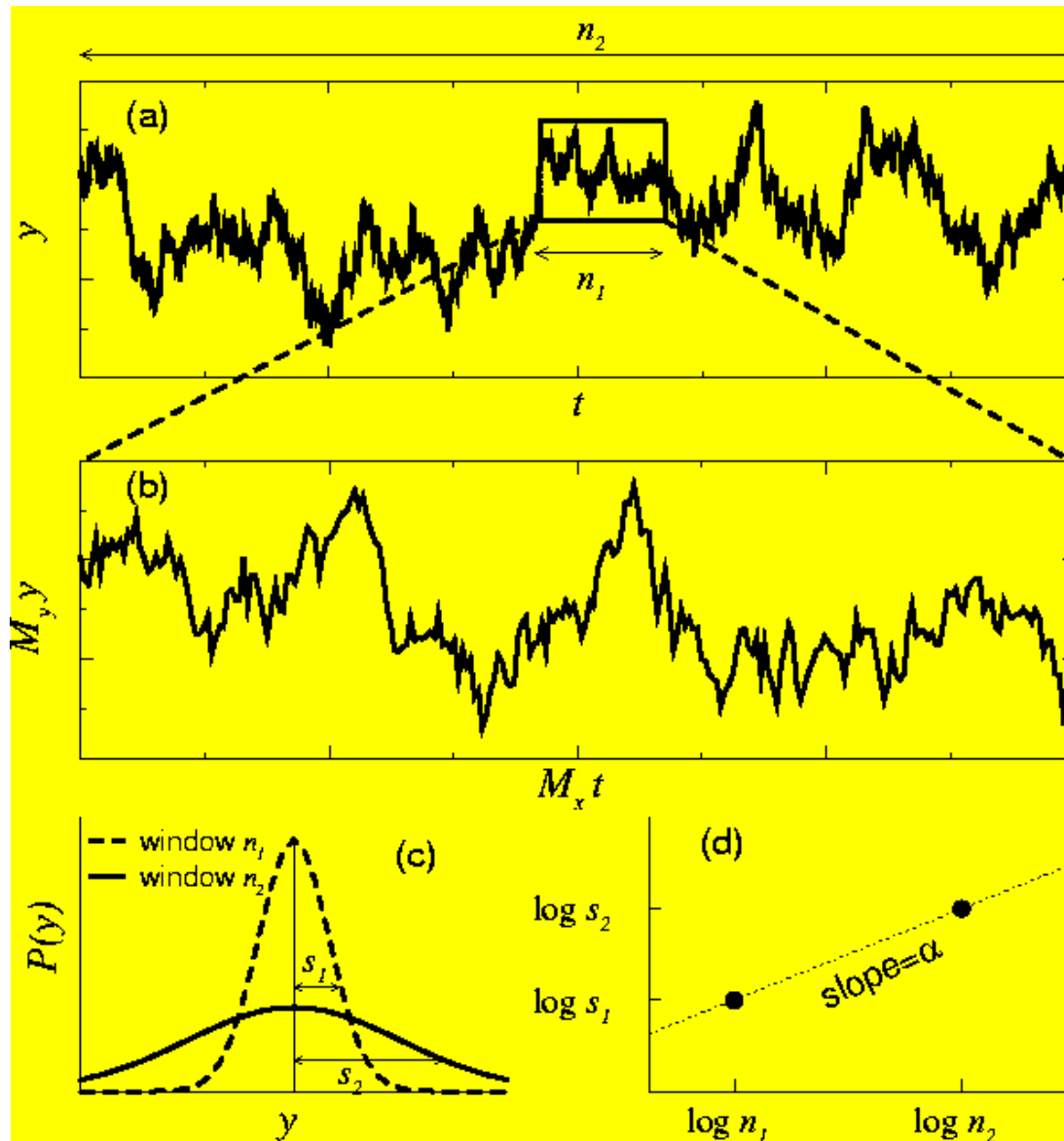
- Gli oggetti frattali sono autosimili  
(il viceversa non e' vero!)
- obbediscono a una legge di scaling

$$N = \rho^{D_s}$$

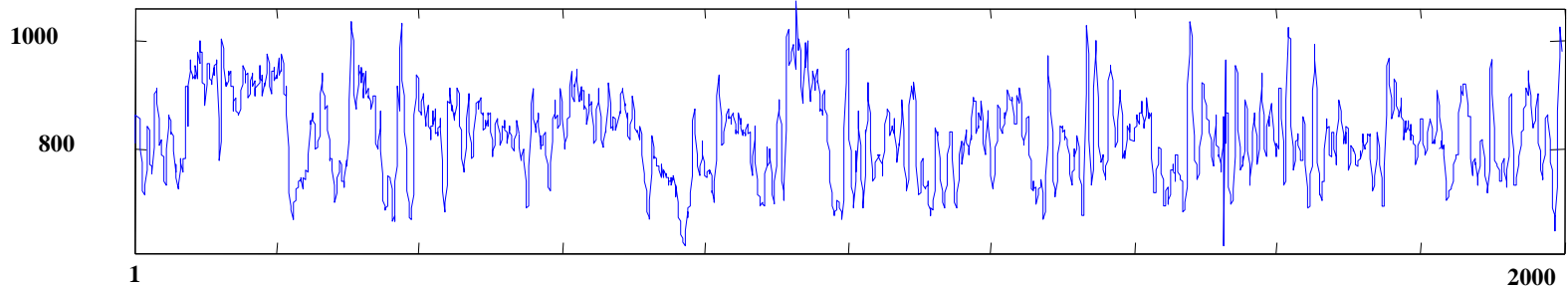
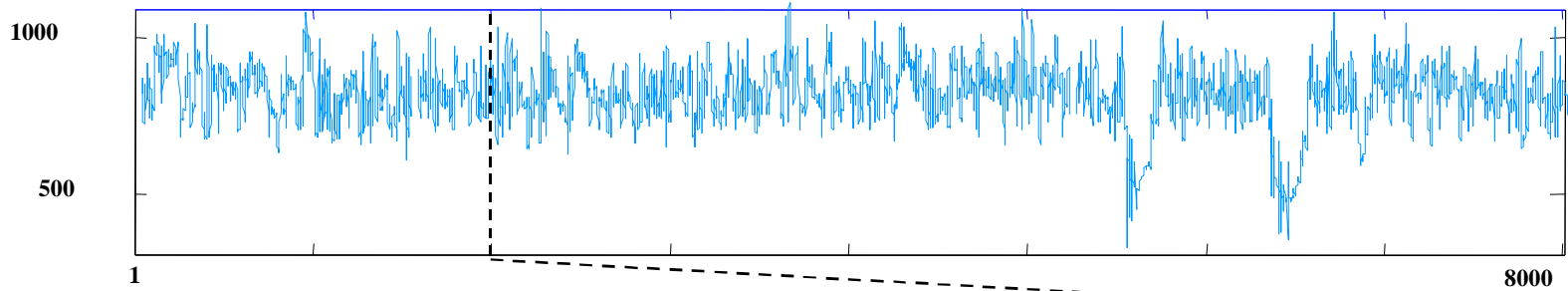
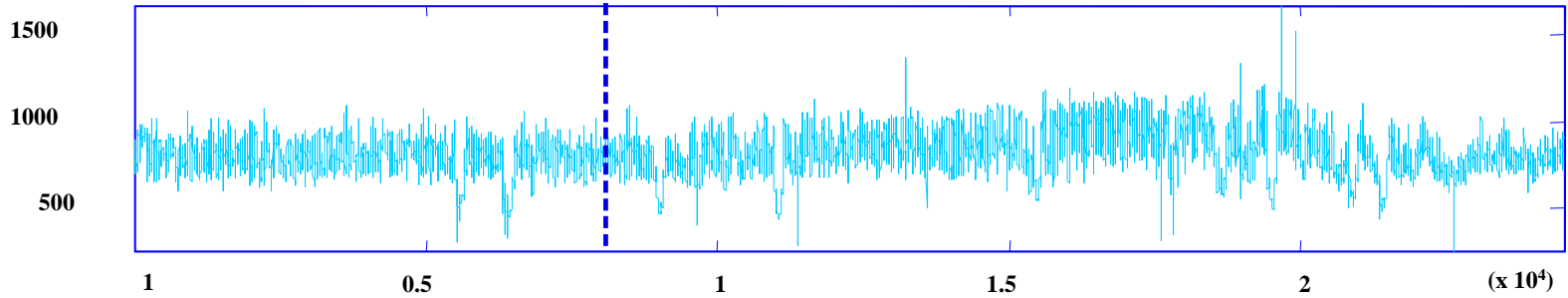
*N: numero di oggetti riscovati,  $\rho$ : fattore di riduzione,  $D_s$ : dimensione di autosimiglianza*

$$D_s = \log(N)/\log(\rho)$$

# Autosimiglianza di una serie temporale



# Serie temporali



# Autosomiglianza statistica

- Un processo stocastico  $\{X_t, t \geq 0\}$  si dice autosimile con parametro di autosimilarità  $H > 0$  (o  $H$ -ss) se:

– per ogni fattore di *stiramento*  $\lambda > 0$ , il processo riscaldato

$\lambda^{-H} X_{\lambda t}$  soddisfa

$$\{\lambda^{-H} X_{\lambda t}\} \stackrel{d}{=} \{X_t\}$$

(stessa distribuzione)

# Autosomiglianza statistica

- Un processo stocastico  $\{X(t), t>0\}$  si dice autosimile se per ogni  $a>0$  esiste  $b>0$  tale che

$$\{X(at)\} \stackrel{d}{=} \{bX(t)\}$$

(stessa distribuzione statistica)

- se  $\{X(t)\}$  è autosimile allora esiste un unico valore  $H>0$  tale che  $b = a^H$



# Proprietà dei processi autosimili

- $X_t$  processo stocastico autosimile con parametro di autosimilarità  $H$  e autocorrelazione  $\{\rho_k\}$ 
  - $\rho_k = ck^{-\lambda}$ ,  $\lambda = 2H-1$
  - Densità spettrale a legge di potenza:  $1/f^\beta$ ,  $\beta > 0$ ,  $\beta = 2H+1$
  - Varianza: decade molto lentamente
  - $\rho_k^{(m)} = \rho_k$

# H: Esponente di Hurst

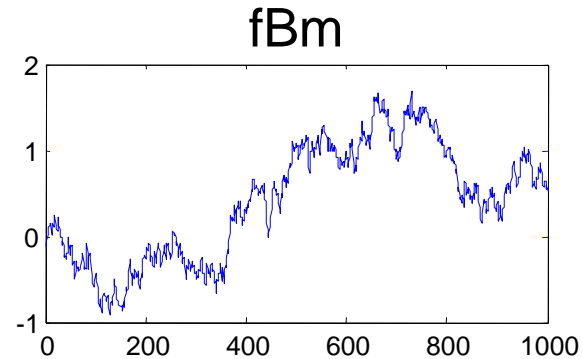
- $0 < H < 1$ 
  - processo autosimile
- Valori particolari:
  - $H=0$  rumore bianco
  - $H=0.5$  moto browniano tradizionale
  - $H=1$  segnale *differenziabile* (smooth)
- $H = D_E + 1 - D_f$ 
  - $D_E$  = dimensione euclidea
  - $D_f$  = dimensione frattale
- Qualifica la natura della *memoria* del processo e ne quantifica l'intensità
  - $0 < H < 0.5$  antipersistenza
  - $0.5 < H < 1$  persistenza
  - $H = 0.5$  random walk

# Processi autosimili: fBm e fGn

- **fBm: *fractional brownian motion***, anche indicato con  $\mathbf{B}_H(\mathbf{t})$ , con esponente di scaling  $H$ 
  - processo **non stazionario**
  - $0 < H < 0.5$ 
    - processo **antipersistente**
  - $0.5 < H < 1$ 
    - processo **persistente**
- **fGn:  $Y_H(t) = B_H(t) - B_H(t-1)$ , *fractional Gaussian noise***, con esponente di scaling  $H$ 
  - fGn: processo **stazionario**

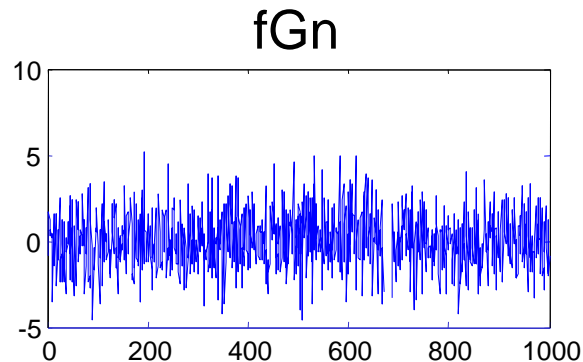
# Processi autosimili: fBm e fGn

- *fractional brownian motion, fBm,  $B_H(t)$*



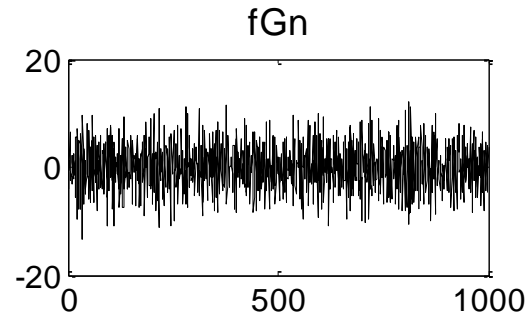
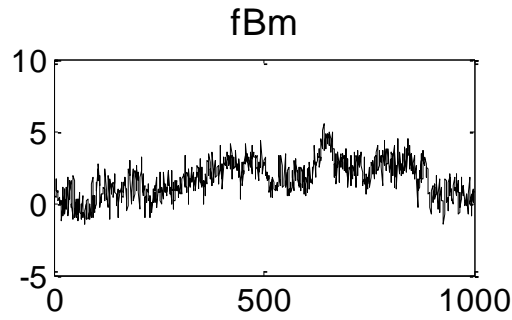
- La serie **fBm** è non stazionaria con incrementi stazionari, che prendono il nome di *fractional Gaussian noise, fGn*.

$$Y_H(t) = B_H(t) - B_H(t-1)$$

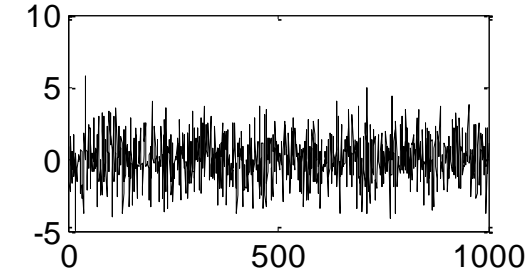
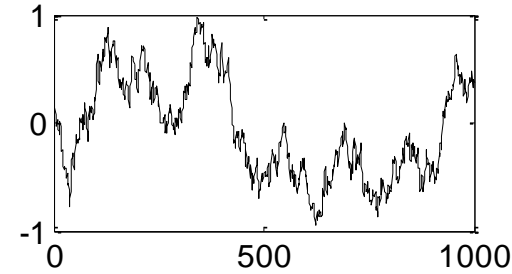


# fBm e fGn

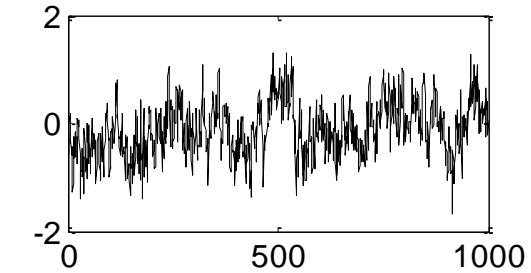
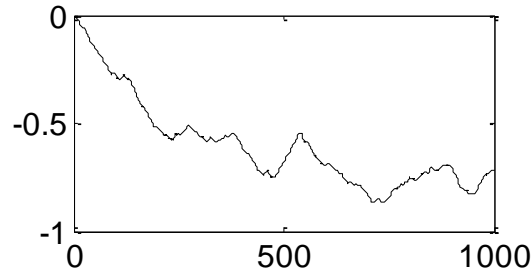
**H=0.1**



**H=0.5**



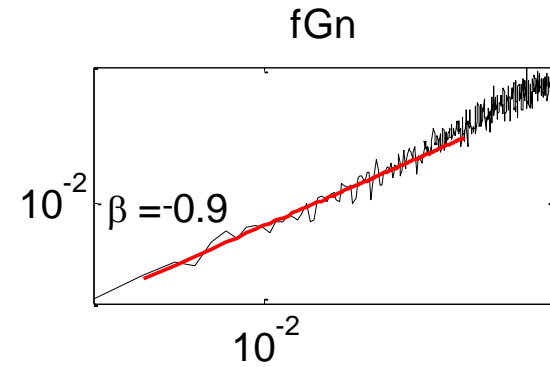
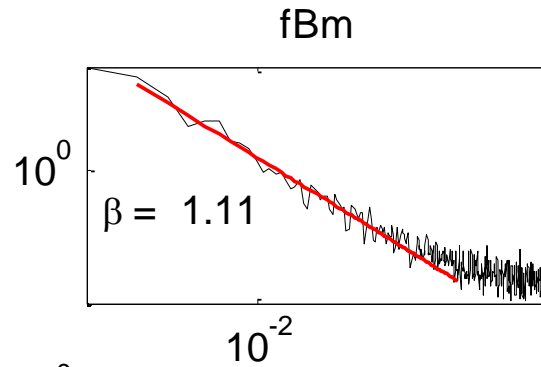
**H=0.9**



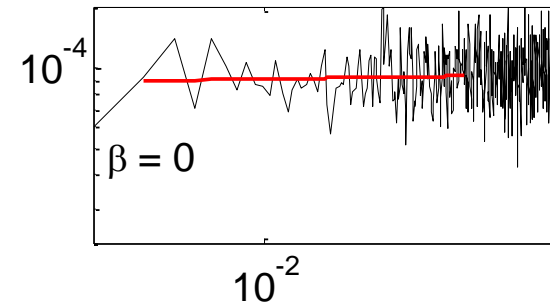
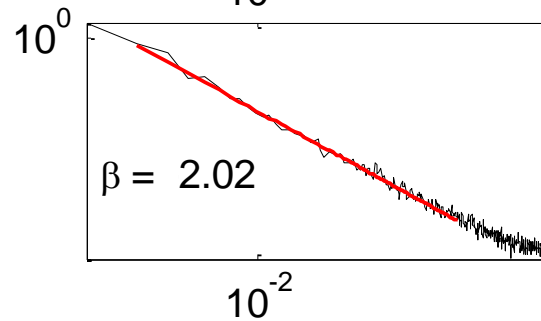
$$\text{PSD} \sim 1/f^\beta$$

# Spettri fBm e fGn

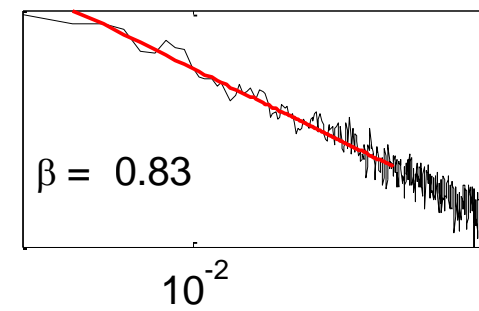
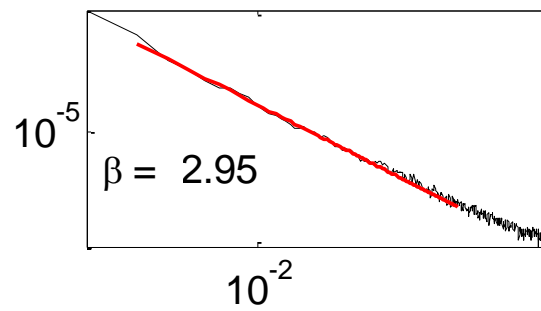
**H=0.1**



**H=0.5**



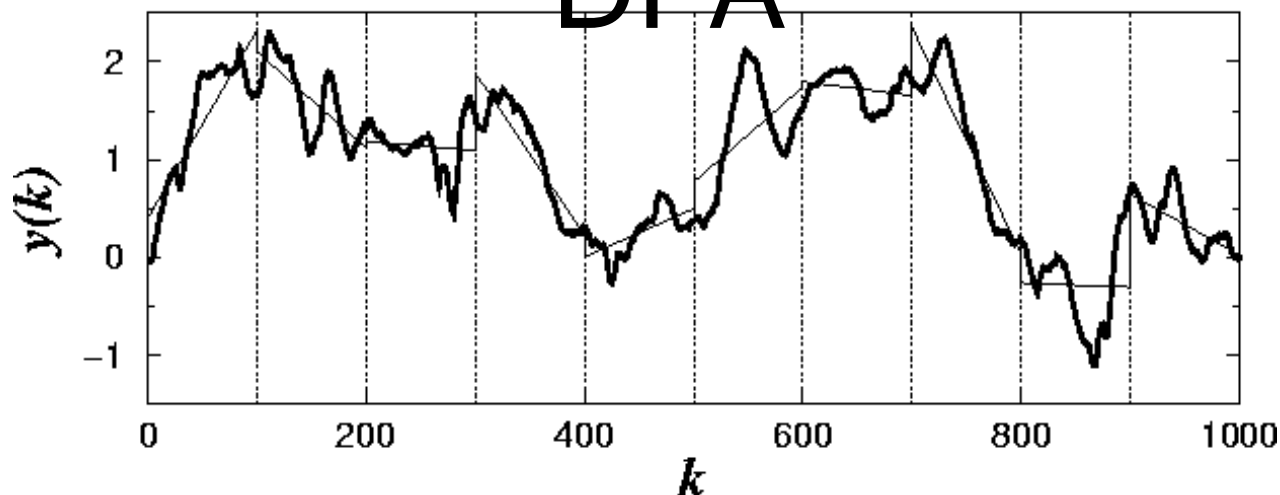
**H=0.9**



# Calcolo di H

- *Rescaled Range Analysis*
- **Detrended Fluctuation Analysis (DFA)**
- *Wavelets*
- *Aggregate Variance Method*
- *Absolute Value Method*
- *....*

# DFA



$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - y_n(k)]^2}$$

- $y_n(k)$  rappresenta la retta di regressione
- $n$  e' la lunghezza dell'intervallo di osservazione
- In caso di autosimilarità

$$F(n) \sim n^\gamma$$



# Esponente DFA

- $\gamma = 1$  e' tipico di processi noti come  $1/f$  (legge di potenza)
- $\gamma = 1.5$  caratterizza la diffusione ordinaria (moto browniano)
- $\gamma = 0.5$  indica alternanza di valori alti e bassi (rumore bianco)
- $\gamma \geq 1$  indica correlazione diversa da legge di potenza

# Dimensione di Correlazione

$$D_2 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \log \sum_i p_i^2 / \log \rho$$

- $\sum_i p_i^2$  : misura la probabilita' che due punti sull'attrattore si trovino dentro celle di lunghezza  $\rho$
- ha lo stesso andamento di scala della probabilita' che due punti del set di dati abbiano distanza  $< \rho$  (correlazione a coppie)

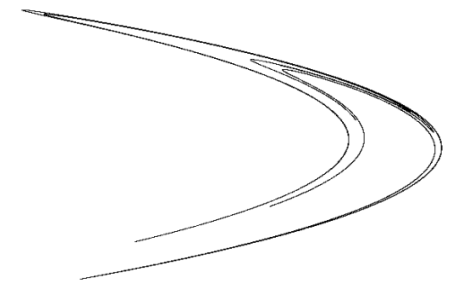
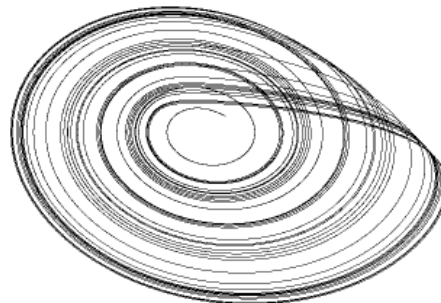
# Dimensione di Lyapunov (Kaplan-Yorke)

$$D_L = D_{KY} = \nu + (1/|\lambda_{\nu+1}|) \sum_i \lambda_{\nu}$$

- $i$  varia da 1 a  $\nu$ , dove  $\nu$  e' il piu' alto intero per cui la somma dei primi  $\nu$  esponenti e' positiva cioe':

$$\mu(\nu) = \sum_i \lambda_{\nu} > 0$$

- e' una misura che tenta di caratterizzare un attrattore prendendo in considerazione anche le sue caratteristiche dinamiche



# Relazioni tra esponenti

- Segnale frattale

- dimensione frattale:  $D_f$
- dimensione euclidea:  $D_E$
- esponente Hurst:  $H$
- legge di potenza:  $P(f) \sim f^{-\alpha}$
- legge di potenza incr.:  $P(f) \sim f^{-\beta}$
- esponente DFA:  $\gamma$

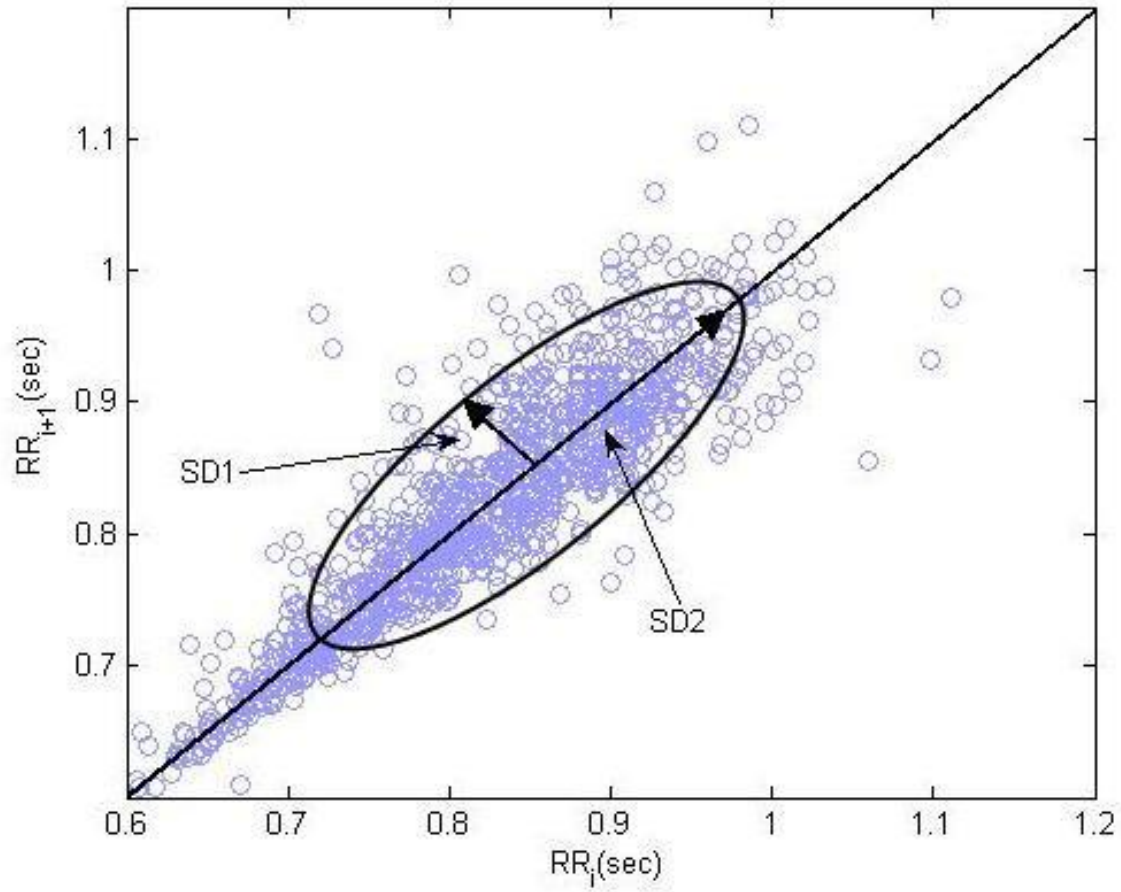
$$D_f = D_E + 1 - H$$

$$\alpha = 2H + 1$$

$$\beta = 1 - 2H$$

$$\gamma = (\alpha + 1)/2$$

# POINCARÉ' PLOT



ESERCIZI (da applicare a segnali EEG, ECG, ecc.):

Scrivere un programma in MATLAB per calcolare:

- la dimensione  $m$  dello spazio di embedding, la distanza temporale  $k$  ottima
- la correlation dimension e la Sample Entropy
- la dimensione frattale
- l'esponente beta
- i parametri del Poincaré plot

# ANALISI DELLA SCRITTURA

- Estrazione profilo della velocità curvilinea
- Calcolo parametri dello stroke: durata, lunghezza, velocità di picco, ....

Scrivere un programma in MATLAB per calcolare tali parametri

# Riferimenti 1/2

Per una [panoramica generale](#) dei metodi presentati:

- H. Kantz, T. Schreiber, *Nonlinear time series analysis*, Cambridge University Press, 2nd Ed 2004.
- D.T. Kaplan, L. Glass, *Understanding nonlinear dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- H.D.I. Abarbanel, R. Brown, J.J. Sidorowich, L.Sh. Tsimring, *The analysis of observed chaotic data in physical systems*, Review of Modern Physics, 65(4), 1331-1362, 1993.
- T. Parker, L. Chua, *Chaos: A tutorial for engineers*, Proceedings of the IEEE, 75, 982, 1987.

## [Temi specifici:](#)

**Ricostruzione nello spazio di embedding:**

T.D. Sauer, J.A. Yorke, M. Casdagli, *Embedology*, J of Statistical Physics, 65, Nos 3/4, 579-616, 1991.

M.B. Kennel, R. Brown, and H.D.I. Abarbanel, *Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction*, Phys. Rev. A, 45, 3403-3411, 1992.

Metodi di analisi non lineare di  
serie temporali



# Riferimenti 2/2

## **Serie surrogate:**

1. T. Schreiber, *Costrained randomization of time series*, Physical Review Letters, 80, 2105-2109, 1998
2. T. Schreiber, A. Schmitz, *Surrogate time series*, Physica D, 142, 346-382, 2000.

## **Test di nonlineari :**

1. J. Theiler, S. Eubank, A. Longtin, B. Galdrikian, and J.D. Farmer, *Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data*, Physica D, 58, 77-94, 1992.
2. T. Schreiber, A. Schmitz, *Improved surrogate data for non-linearity tests*, PhysRev Lett, 77, 635-638, 1996.

# Software e siti web

TISEAN (Nonlinear Time Series Analysis),

[http://www.mpipks-dresden.mpg.de/~tisean/TISEAN\\_2.1/index.html](http://www.mpipks-dresden.mpg.de/~tisean/TISEAN_2.1/index.html)

**Tutorial**

**Manuale**

**Download software**

**The TISEAN archive page**

- [download source code + documentation](#)
- [download binary executables](#)
  - [UNIX](#)
  - [Windows](#)
  - [others](#)
- [mailing list](#) ! **Subscribe now!**

**Download source code + documentation**

The full source code in partly **C** and partly **FORTRAN** has been bundled together with the full **documentation** in **html** format. This standard package is what every user needs since it contains all the documentation. Also, on **UNIX** and certain other machines, the whole package should be compiled from the sources. In order to do this, a suitable **configure** script and **Makefiles** are included. Follow the link "Installation" once you have a local copy of the package. The package is available in several formats.

**Gzip'ed tar archive**

Download [TISEAN\\_2.1.tar.gz](#). Then run

# Software e siti web

TSTOOL (Nonlinear Time Series Analysis)

<http://www.physik3.gwdg.de/tstool/index.html>

Software for Dynamical Systems Theory

<http://www.enm.bris.ac.uk/staff/hinke/dss/>

Dynamical Systems Software - Microsoft Internet Explorer

File Modifica Visualizza Preferiti Strumenti ?

Indirizzo <http://www.enm.bris.ac.uk/staff/hinke/dss/> Vai Collegamenti »

## Software for Dynamical Systems Theory

[DSS Home](#) [All software](#) [Maps](#) [ODE's](#) [PDE's](#) [Delay](#) [Continuation](#) [Miscellaneous](#)

This website aims to collect all available software on dynamical systems theory. The idea was launched in the special year [Emerging Applications of Dynamical Systems](#), 1997/1998, at the [Institute for Mathematics and its Applications](#).

[alphabetically ordered list](#)

**discrete time systems:** [diffeomorphisms](#)  
[noninvertible maps](#)

**continuous time systems:** [ODE's](#)  
[PDE's](#)  
[delay equations](#)

---

[continuation](#)  
[miscellaneous](#)

*Not found*

If you know of a particular software package that is not listed in the [alphabetically ordered list](#), please send email with the [relevant information](#) to [h.m.osinga@bristol.ac.uk](mailto:h.m.osinga@bristol.ac.uk)

Copyright © 1997 by [Hinke Osinga](#)  
Comments to: [h.m.osinga@bristol.ac.uk](mailto:h.m.osinga@bristol.ac.uk)  
Created: Sept 29 1997 --- Last modified: Tue May 14 15:08:13 2002

## Determinismo non Lineare

### Preprocessing

Un preprocessing adatto all'analisi lineare (es: analisi spettrale classica) può introdurre forti distorsioni nel segnale e alterare o eliminare le non linearità presenti nel segnale

### Soggetti Normali

Picco di variazione della mutua informazione a bassi valori di  $\tau \Rightarrow$  relazioni non lineari fra battiti vicini.

### Soggetti Trapiantati

Assenza del picco di variazione della mutua informazione a bassi valori di  $\tau \Rightarrow$  diminuzione relazioni non lineari fra battiti vicini  $\Rightarrow$  perdita di velocità ed elasticità di intervento del sistema di controllo dovuta alla denervazione chirurgica.

## Massimo Esponente di Lyapunov

In seguito alla procedura di filtraggio e ricostruzione è sempre possibile effettuare il calcolo del massimo esponente di Lyapunov.

Assume sempre un valore positivo  $\Rightarrow$  indica che il sistema di controllo cardiovascolare sul lungo periodo è essenzialmente di natura caotica per tutte le categorie di pazienti.

# Procedura per l'analisi di dati sperimentali

- Assicurarsi di avere a disposizione un numero sufficiente di punti per descrivere il fenomeno (non vale sovracampionare)
- Calcolare  $\tau$  dalla funzione di Autocorrelazione e di Mutua Informazione. Se i due risultati sono in conflitto, OK per la Mutua
- Stimare la dimensione di embedding con l'algoritmo dei Falsi Vicini
- Stimare la dimensione di correlazione
- Calcolare lo spettro degli esponenti di Lyapunov con il  $\tau$  e la  $d$  stimate
- Controllare che ci sia consistenza tra il calcolo del primo esponente positivo (dominante) e il valore stimato con lo spettro